Università degli studi Milano-Bicocca

IL GRUPPO FONDAMENTALE DELLE VARIETÀ DI FANO

Isaia Nisoli

Matricola 071059

Anno accademico 2005-2006

Relatore: Dottor Alessandro Ghigi

20 Ottobre

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Scopo di questa tesi è dare una panoramica degli strumenti e dei risultati necessari per dimostrare che le varietà di Fano sono semplicemente connesse. Questo risultato è dovuto a Kobayashi, che lo dimostrò nel 1961 sotto l'ipotesi aggiuntiva che esista una metrica a curvatura di Ricci positiva. Dalla soluzione della congettura di Calabi, dovuta a Yau (1978), segue che questa ipotesi è superflua.

Il contenuto dei vari capitoli è il seguente.

Nel primo capitolo vengono richiamati alcuni risultati classici di geometria Riemanniana, quali il teorema di Hopf-Rinow e soprattutto il teorema di Bonnet-Myers. Quest'ultimo afferma che una varietà compatta con curvatura di Ricci positiva ha gruppo fondamentale finito. Questo è l'ingrediente Riemanniano nella dimostrazione del risultato di Kobayashi. Si ricordano inoltre i risultati fondamentali della teoria di Hodge per varietà Riemanniane compatte.

Nel secondo capitolo vengono introdotte le nozioni di struttura quasi-complessa e complessa, la decomposizione delle forme in bigrado, le classi di Chern di un fibrato vettoriale, il carattere di Chern e la classe di Todd. Infine viene enunciato il teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch.

Nel terzo capitolo si studiano le varietà di Kähler, in particolare le proprietà di cui gode il tensore di curvatura di una metrica Kähleriana, sottolineando soprattutto il fatto che al tensore Ricci si può sostituire una forma differenziale di tipo $(1, 1)$ che è chiusa e rappresenta la prima classe di Chern del fibrato tangente. Segue una discussione della teoria di Hodge Kähleriana e quindi della congettura di Calabi, ossia del teorema di Yau. Per quanto riguarda questo risultato fondamentale, ci limitiamo a spiegare come il problema venga tradotto in una equazione di Monge-Ampère complessa ellittica.

Nel capitolo finale sono definite le varietà di Fano. Applicando il teorema di Calabi-Yau si dimostra che esse ammettono metriche (Kähleriane) a curvatura di Ricci positiva. I risultati del primo capitolo garantiscono quindi che il gruppo fondamentale è finito. Pertanto è sufficiente considerare rivestimenti finiti. Un'analisi della caratteristica di Eulero-Poincaré del fascio strutturale, basata sulla formula di Hirzebruch-Riemann-Roch ed il teorema di annullamento di Kodaira, dimostra che questi sono tutti banali. Ciò conclude la dimostrazione del teorema.

Osserviamo che nei primi anni '90 è stata data una dimostrazione alternativa del fatto che le varietà di Fano sono semplicemente connesse. Questa dimostrazione, di natura puramente algebrica, è dovuta indipendentemente a Campana e a Kollár-Miyaoka-Mori.

Capitolo 2

Geometria riemanniana

Consideriamo noti i concetti di varietà differenziabile M, fibrato vettoriale, metrica riemanniana g e mappa exponenziale exp_p. Assumeremo che M sia sempre connessa.

2.1 Tensore curvatura e curvatura di Ricci

Definizione 2.1.1. *Una connessione affine su una varietà differenziabile M è una mappa $\mathbb{R}$-lineare:*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

che sia $\mathcal{C}^\infty$ lineare nel secondo argomento e che soddisfi la seguente regola di Leibniz nel primo:

$$\nabla(fY)(X) = X(f)Y + f\nabla(Y)(X)$$

Essa viene indicata con

$$\nabla_X Y := \nabla(Y)(X)$$

Diciamo che una connessione è compatibile con la metrica se:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Definiamo il tensore di torsione di una connessione come:

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Teorema(Unicità della connessione di Levi Civita) 2.1.2. *Esiste una sola connessione su M compatibile con la metrica g e priva di torsione.*

Definizione 2.1.3. *La curvatura R di una connessione lineare ∇ è un tensore di tipo (3,1) definito come*

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Chiameremo curvatura, con abuso di notazione anche:

$$R(X,Y,Z,W) =< R_{X,Y}Z, W > .$$

Definizione 2.1.4. *Sia $X = e_n$ un vettore di norma 1 in T_pM, sia*

$$e_1, \ldots, e_{n-1}$$

una base ortonormale dell'iperpiano ortogonale ad x. Definiamo:

$$r_p(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} < R(e_i, X)Y, e_i >,$$

$$Ric_p(X) = \sum_{i=1} < R(e_i, X)X, e_i > .$$

Questo valore è indipendente dalla base ortonormale scelta. Supponiamo che e_i' sia un'altra base del complemento ortogonale di X. Allora $e_i' = Ae_i$ per $A \in O(n-1)$. Dunque $e_i' = a_i^j e_j$. Quindi

$$Ric_p(X) = \sum_{i=1}^{n-1} < R(e_i', X)X, e_i' >=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} < R(\sum_j a_{ij} e_j, X)X, \sum_j a_{ij} e_j >=$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j,k} a_{ij} a_{ik} < R(e_j, X)X, e_k >=$$

$$\sum_{j,k} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} a_{ik} \right) < R(e_j, X)X, e_k >=$$

$$\sum_{j,k} \delta_{i,j} < R(X, e_j)X, e_k >=$$

$$\sum_j < R(x, e_j)x, e_j > .$$

Quindi $Ric_p(X)$ non dipende dalla base ortonormale scelta. Diciamo che g ha curvatura di Ricci positiva se r_p è un prodotto scalare definito positivo per ogni p o equivalentemente se $Ric(X) > 0$ per ogni $X \in T_pM$, con $X \neq 0$.

Simmetrie del tensore di curvatura 2.1.5. *Sia (M, g) una varietà riemanniana, allora valgono le seguenti identità:*

1. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$, Prima identità di Bianchi o algebrica,
2. $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$,
3. $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T)$,
4. $R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$,
5. $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$.

Dimostrazione.

1. Usando la simmetria della connessione di Levi-Civita:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

$$+\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[X,Z]}Y =$$
$$\nabla_Y[Z,X] + \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y =$$
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]].$$

   Poichè $(\mathcal{X}(M), [\,,\,])$ è un'algebra di Lie l'espressione sopra è nulla per l'identità di Jacobi.

2. è ancora (1).
3. segue dalla definizione di curvatura.
4. è equivalente a $R(X,Y,Z,Z) = 0$, usando la compatibilità con la metrica otteniamo:

$$R(X,Y,Z,Z) =< \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z >=$$

$$X < \nabla_Y Z, Z > - < \nabla_Y Z, \nabla_X Z > -Y < \nabla_X Z, Z >$$

$$+ < \nabla_X Z, \nabla_Y Z > -\frac{1}{2}[X,Y] < Z, Z >=$$

$$X < \nabla_Y Z, Z > -Y < \nabla_X Z, Z > -\frac{1}{2}[X,Y] < Z, Z >=$$

$$\frac{1}{2}X(Y < Z,Z >) - \frac{1}{2}Y(X < Z,Z >) - \frac{1}{2}[X,Y] < Z,Z >= 0.$$

5. Usiamo la (2) e la (3).

□

2.2 Il teorema di Hopf-Rinow

Un altro concetto che ci serve è quello di varietà geodeticamente completa.

Definizione 2.2.1. *Una varietà riemanniana si dice geodeticamente completa se per ogni $p \in M$, la mappa esponenziale exp_p è definita per ogni $v \in T_pM$, cioè se ogni geodetica $\gamma(t)$ che parte da p è definita per tutti i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$.*

Enunceremo ora il teorema di Hopf-Rinow.

Teorema di Hopf-Rinow 2.2.2. *Sia M una varietà Riemanniana. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *per qualche punto $p \in M$ $\exp_p$ è definita su tutto T_pM.*
2. *gli insiemi chiusi e limitati di M sono compatti.*
3. *M è completo come spazio metrico rispetto alla distanza Riemanniana.*
4. *M è geodeticamente completa.*

Inoltre una qualsiasi delle condizioni precedenti implica che per ogni p e q esiste una geodetica minimale γ che unisce p a q.

Teorema 2.2.3. *Sia $\pi : \tilde{M} \to M$ un rivestimento e g una metrica su M. Se (M, g) è completa anche $\tilde{M}$ con la metrica $\tilde{g} = \pi^* g$ lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Vogliamo mostrare che $\exp_{\tilde{p}}$ è definita su tutto $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Dato $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ poniamo $v := \pi_*(\tilde{v})$. Poichè M è completa $\exp_p(v)$ è definita. Sia $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ e sia $\tilde{\gamma}$ il sollevamento di γ tale che $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$. Vogliamo dimostrare che $\tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{p}} t\tilde{v}$, cioè che $\tilde{\gamma}$ è la geodetica di $(\tilde{M}, \tilde{g})$ uscente da $\tilde{p}$ con vettore tangente $\tilde{v}$. Per ogni $t \in [0,1]$ siano U_t un intorno ammissibile (cioè ben ricoperto) di $\gamma(t)$ e V_t un intorno di $\tilde{\gamma}(t)$ tali che $\pi|_{V_t} : V_t \to U_t$ sia un diffeomorfismo. Poiché $\tilde{g} = \pi^* g$, questo diffeomorfismo è isometrico. Poichè la rappresentazione in coordinate dell'equazione delle geodetiche dipende solo dai coefficienti della metrica e $\pi|_{V(t)}$ è un'isometria, allora $\tilde{\gamma}$ soddisfa l'equazione delle geodetiche. Sia V_0 un intorno di $\tilde{p}$ tale che $\pi|_{V(0)}$ è un diffeomorfismo. Quindi $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ implica che $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$. □

2.3 Variazione prima e seconda dell'energia

Ora chiariamo il concetto di variazione di una curva.

Definizione 2.3.1. *Sia $c : [0, a] \to M$ una curva differenziabile in M. Una variazione di c è una mappa liscia $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ tale che:*

$$f(0, t) = c(t) \qquad t \in [0, a].$$

È detta variazione propria se

$$f(s, 0) = c(0)$$

e

$$f(s, a) = c(a),$$

per ogni $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Il campo vettoriale lungo la curva definito da

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$$

è detto campo variazionale di f.

Studiamo ora cosa succede al funzionale energia

$$E(s) = E(f(s, \cdot)) = \int_0^a \left|\left|\frac{\partial f}{\partial t}(s, t)\right|\right|^2 dt$$

variando una curva. Useremo nel seguito la notazione:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \gamma' = \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Variazione prima dell'energia 2.3.2. *Sia $c : [0, a] \to M$ una curva differenziabile e $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ una variazione di c con campo variazionale V. Se $E : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ è l'energia di f allora:*

$$\frac{1}{2}E'(s) = -\int_0^a < \gamma', \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} > dt + < \gamma', \dot{\gamma} > \Big|_0^a. \tag{2.1}$$

Dimostrazione.

$$\frac{d}{ds}\int_0^a < \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} > dt =$$

$$\int_0^a 2 < \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} > dt =$$

$$\int_0^a 2 < \nabla_{\gamma'}\dot\gamma, \dot\gamma > dt.$$

Per la simmetria della connessione Riemanniana e poichè $[\gamma', \dot\gamma] = f_*[\partial_s, \partial_t] = f_*(0) = 0$ si ha:

$$\int_0^a 2 < \nabla_{\gamma'}\dot\gamma, \dot\gamma > dt = \int_0^a 2 < \nabla_{\dot\gamma}\gamma', \dot\gamma > dt =$$

$$2\frac{d}{dt}\int_0^a < \gamma', \dot\gamma > dt - 2\int_0^a < \gamma', \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > dt =$$

$$2 < \gamma', \dot\gamma > \Big|_0^a - 2\int_0^a < \gamma', \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > dt.$$

Che valutato per $s = 0$ dà il risultato. □

Ora studiamo la variazione seconda nel caso in cui c è una geodetica.

Variazione seconda dell'energia 2.3.3. *Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una geodetica e $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ una variazione propria di γ. Sia E la funzione energia della variazione. Allora:*

$$\frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^a < V(t), \frac{D^2V}{dt^2} + R(V, \frac{d\gamma}{dt})\frac{d\gamma}{dt} > dt. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Derivando rispetto ad s (**??**):

$$\frac{1}{2}E''(s) = \frac{d}{ds}\left[< \gamma', \dot\gamma > \Big|_0^a - \int_0^a < \gamma', \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > dt\right] =$$

$$< \nabla_{\gamma'}\gamma', \dot\gamma > \Big|_0^a + < \dot\gamma, \nabla_{\gamma'}\dot\gamma > \Big|_0^a - \int_0^a < \nabla_{\gamma'}\gamma', \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > - \int_0^a < \gamma', \nabla_{\gamma'}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > .$$

Valutando in $s = 0$ otteniamo che il primo, il secondo ed il terzo termine sono zero rispettivamente poichè la variazione è propria (per i primi due) e poichè γ è una geodetica (per il terzo). Dalla definizione di curvatura:

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\gamma'}\dot\gamma + R(\gamma', \dot\gamma)\dot\gamma.$$

Dunque in $s = 0$ (usando anche la simmetria della connessione)

$$\nabla_{\gamma'}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}V + R(V, \dot\gamma)\dot\gamma.$$

Sostituendo otteniamo la tesi. □

Ora possiamo dimostrare il teorema di Bonnet-Myers.

Teorema di Bonnet-Myers 2.3.4. *Sia M^n una varietà riemanniana completa. Supponiamo che $r_p(X,Y)$ sia definita positiva per ogni p in M ed esista un r tale che per ogni p $r_p(X,Y) \geq \frac{(n-1)}{r^2} < X, Y >$ per ogni $X, Y \in T_pM$. Allora M è compatta, il suo diametro $diam(M) \leq \pi r$ e $|\pi_1(M)| < \infty$.*

Dimostrazione. Siano p e q due punti in M. Poichè M è completa, per il teorema di Hopf-Rinow(**??**), esiste una geodetica minimizzante $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ che unisce p a q. Sia

$$l = L(\gamma) = \int_0^1 < \dot{\gamma}, \dot{\gamma} > dt.$$

Per la definizione di distanza riemanniana $L(\gamma) = d(p,q)$. Supponiamo per assurdo che $l > \pi r$. Consideriamo $n-1$ campi paralleli, ortogonali tra loro e che appartengano al complemento ortogonale di $\gamma'(t)$. Sia $e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{l}$ e siano $V_j(t) = (sin(\pi t))e_j(t)$ per $j = 1, \ldots, n-1$. Tutti questi campi generano variazioni proprie di γ. Il campo e_j è parallelo quindi:

$$\begin{gathered} V_j''(t) = \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} V_j(t) = \\ \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \big(\sin(\pi t) e_j(t) \big) = \\ \nabla_{\dot{\gamma}} \big(\cos(\pi t) \pi e_j(t) \big) = \\ -\pi^2 \sin(\pi t) e_j(t). \end{gathered}$$

Inoltre:

$$\begin{gathered} < V_j, R(V_j, \dot{\gamma})\dot{\gamma} >= \\ (\sin(\pi t))^2 < R(\dot{\gamma}, e_j)\dot{\gamma}, e_j >= \\ -\sin^2(\pi t) K(e_n \wedge e_j) \cdot l^2. \end{gathered}$$

Sia $K(e_n(t) \wedge e_j(t))$ la curvatura sezionale rispetto al piano generato da $e_n(t), e_j(t)$ in $\gamma(t)$ allora usando la formula per la variazione seconda dell'energia (**??**):

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} E_j''(0) = -\int_0^1 < V_j, V_j'' + R(V_j, \dot{\gamma})\dot{\gamma} > dt = \\ \int_0^1 sin^2 \pi t (\pi^2 - l^2 K(e_n(t) \wedge e_j(t))) dt. \end{gathered}$$

Sommando su j e utilizzando la definizione di curvatura di Ricci, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) = \int_0^1 \{ sin^2 \pi t ((n-1)\pi^2 - l^2 Ric_{\gamma(t)}(e_n(t))) \}.$$

Visto che $Ric_{\gamma(t)}(e_n(t)) \geq \frac{1}{r^2}(n-1)$ e $l > \pi r$, abbiamo

$$l^2 Ric_{\gamma(t)}(e_n(t)) > \pi^2(n-1).$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) < \int_0^1 sin^2 \pi t(\pi^2 - \pi^2)dt = 0.$$

Quindi esiste almeno un indice j per cui $E_j''(0) < 0$, cosa che contraddice il fatto che γ sia minimizzante. Quindi $l \leq \pi r$. Questo implica che $d(p,q) \leq \pi r$ per ogni p,q in M e quindi $diam(M) \leq \pi r$. Quindi M è limitata e per Hopf-Rinow è compatta. Questo conclude la dimostrazione della prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, cioè che il primo gruppo fondamentale è finito, sia $\tilde{M}$ il rivestimento universale di M con applicazione di rivestimento $\pi : \tilde{M} \to M$. Usando (**??**) sappiamo che $(\tilde{M}, \tilde{g})$ è completa dove $\tilde{g} = \pi^* g$. Otteniamo quindi che $r_{\tilde{p}}(X,Y)$ è definita positiva per ogni punto $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Poichè per ogni $U_{\tilde{p}}$ $\pi|_{U_{\tilde{p}}}$ è un'isometria ed un diffeomorfismo

$$r_{\tilde{p}}(X,Y) = r_p(\pi_* X, \pi_* Y) > \frac{(n-1)}{r^2} g_p(\pi_* X, \pi_* Y) = \frac{(n-1)}{r^2}\tilde{g}_{\tilde{p}}(X,Y).$$

Quindi per la prima parte del teorema anche $\tilde{M}$ è compatto. Perciò ogni punto $p \in M$ ha solo un numero finito di contrimmagini $\pi^{-1}(p) \in \tilde{M}$. E quindi $|\pi_1(M)| < \infty$. □

Lemma 2.3.5. *Sia (M,g) una varietà riemanniana e sia $(U; x_1, \ldots, x_n)$ una carta coordinata. Sia $G(x)$ la matrice dei coefficienti della metrica in x e siano $\frac{\partial}{\partial x_i}$ i campi coordinati. Allora esistono:*

- *una funzione liscia di $x \in U$*

$$H(x) : U \to Gl(n, \mathbb{R})$$

  t.c. $H(x)^2 = G(x)$.

- *una riferimento ortonormale su U $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ data da:*

$$e_i(x) = H(x)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dimostrazione. Indichiamo con $g^{ij}(x)$ i coefficienti della matrice inversa alla matrice dei coefficienti della metrica in x. $G(x)$ è simmetrica e definita positiva quindi è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positivi. Li possiamo indicare quindi come $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$. Posssiamo suppore che $\mu_1, \ldots, \mu_n$ siano positivi. Indichiamo con $P(x)$ la matrice del cambio di coordinate che diagonalizza $G(x)$ e $G'(x)$ la matrice diagonale associata a $G(x)$, ossia $G'(x) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Sia $H'(x)$ la matrice diagonale con elementi $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ed $H(x) = P^{-1}(x)H'(x)P(x)$. Allora:

$$H(x)^2 = P(x)^{-1}H'(x)P(x)P(x)^{-1}H'(x)P(x) =$$

$$P(x)^{-1}H'(x)^2P(x) = P(x)^{-1}G'(x)P(x) = G(x).$$

Indichiamo con h^{ij} i coefficienti della matrice inversa ad $H(x)$. Evidentemente anche $(H(x)^{-1})^2 = G(x)^{-1}$. Siano

$$e_i(x) = \sum_j h^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Allora

$$g(x)(e_i(x), e_j(x)) = \sum_{l,k} g_{lk} h^{ik} h^{jl} =$$

$$= \sum_{l,k} g_{lk} h^{ik} h^{lj}.$$

Ma:

$$g_{lk} = \sum_s h_{ls} h_{sk}.$$

Quindi:

$$\sum_{l,k} g_{lk} h^{ik} h^{lj} = \sum_{l,k} \big(\sum_s h_{sl} h_{sk} h^{ki} h^{lj} \big) =$$

$$= \sum_{sl} \big(\sum_k h_{sl} h^{lj} h_{sk} h^{ki} \big) =$$

$$= \sum_{sl} \big(h_{sl} h^{lj} \delta_{si} \big) =$$

$$= \sum_l (h_{il} h^{lj}) =$$

$$= \delta_{ij}.$$

Quindi i campi

$$e_i(x) = H(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

sono una riferimento ortonormale di $TM|_U$. □

Corollario 2.3.6. *Sia (M, g) compatta di dimensione n ed $r_p(X, Y)$ definita positiva, allora $\pi_1(M)$ è finito.*

Dimostrazione. Indichiamo con S_pM l'insieme dei vettori in T_pM di norma 1 e con $SM = \bigsqcup S_pM$. Dimostriamo che $SM \subset TM$ è un sottoinsieme compatto.

Sia y_n una successione in SM. Sia π la restrizione di $\pi : TM \to M$ a SM indichiamo con $p_n := \pi(y_n)$. Da questa successione possiamo estrarre una sottosuccessione convergente perché M è compatta. Sia $\tilde{p}$ il punto a cui converge. Scegliamo un intorno di $\tilde{y}$ che banalizzi TM. Fissata una base locale $f = \{e_1, \dots, e_n\}$ su $TM|_U$ sia

$$F : TM|_U \to U \times \mathbb{R}^n$$

la funzione che associa a v in TM

$$(\pi(v), a_1, \dots, a_n)$$

dove $(a_1, \dots, a_n)$ sono i coefficienti di v rispetto ai campi vettoriali della base locale f valutati in p. Per (**??**) esiste una base locale di campi ortonormali g. I coefficienti della metrica rispetto a questa base locale sono $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$. Quindi la norma in p di un campo vettoriale espresso in coefficienti $\{b_1(p), \dots, b_n(p)\}$ rispetto a questa base è:

$$\sum_i^n b_i(p)^2.$$

Quindi se v è in SM la sua immagine in $U \times \mathbb{R}^n$ mediante F ha norma uguale a 1 (usando il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$). Usando questa base locale anche SM può essere espresso come $U \times S^{n-1}$. Quindi esiste una sottosuccessione di y_n che è definitivamente contenuta in $U \times S^{n-1}$. Quindi possiamo esprimerla come (p_n, x_n). Poichè S^{n-1} è compatta posso estrarre una sottosuccessione convergente di x_n. Quindi da ogni successione su SM possiamo estrarre una sottosuccessione convergente. Pertanto SM è compatta. Sia

$$r(p, X) := r_p(X(p), X(p)) : SM \to \mathbb{R}.$$

r è $\mathscr{C}^\infty$. SM è compatta e quindi r ammette minimo ϵ. Poichè r è una funzione positiva $\epsilon > 0$. Possiamo trovare r tale che $\epsilon = \frac{(n-1)}{r^2}$ Quindi $r_p(X, Y) \geq \epsilon > 0$ e possiamo applicare il teorema di Bonnet-Myers ottenendo la tesi. □

2.4 Coomologia di De Rham

Definizione 2.4.1. *Indichiamo con $\mathcal{A}^k_M$ le sezioni di $\bigwedge^k(T^*M)$. Definiamo il prodotto esterno come:*

$$\wedge : \mathcal{A}^k \times \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}^{k+l}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta.$$

Definiamo il differenziale esterno $d : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+1}$ in maniera invariante usando la formula di Palais:

$$d(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} v_i(\alpha(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1}) +$$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq k+1} (-1)^{i+j} \alpha([v_i, v_j], v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_k + 1).$$

con $v_i \in \mathscr{X}(M)$.

Si prova con calcoli espliciti che $d^2 = 0$. Pertanto:

$$0 \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0 \simeq \mathscr{C}^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n \to 0$$

è un complesso differenziale.

Definizione 2.4.2. *La coomologia di de Rham di una varietà differenziabile M è definita come la coomologia di questo complesso, cioè:*

$$H^k_{dR}(M, \mathbb{R}) = \frac{Ker(d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M))}{Im(d : \mathcal{A}^{k-1}(M) \to \mathcal{A}^k(M))}.$$

La coomologia di de Rham è molto interessante per il seguente teorema.

Teorema di De Rham 2.4.3. *Sia M una varietà differenziabile. Sia $H^k_{S_\infty}(M, \mathbb{R})$ la coomologia delle k-cocatene singolari C^∞. Allora la mappa naturale*

$$I : H^k_{dR}(M, \mathbb{R}) \to H^k_{S_\infty}(M, \mathbb{R})$$

indotta dall'integrazione delle k-forme lungo le k-catene singolari C^∞ è un isomorfismo.

È noto peraltro che $H^k_{S_\infty}(M, \mathbb{R})$ è canonicamente isomorfo alla coomologia singolare, un oggetto puramente topologico.

2.5 Teoria di Hodge su varietà Riemanniane

La teoria di Hodge sulle varietà orientate compatte permette, una volta scelta la metrica, di scegliere un rappresentante canonico in ogni classe di coomologia di De Rham.

Definizione 2.5.1. *Dato un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V induciamo una metrica che indicheremo con abuso di notazione $<,>$ su ogni prodotto tensoriale di V e V^* imponendo che se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale anche gli elementi della base duale $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ tale che $dx^i(e^j) = \delta^i_j$ lo siano e le basi ottenute da prodotti tensoriali della base ortonormale sia ancora ortonormali. Questa definizione può essere applicata fibra per fibra nel caso di metriche Riemanniane su fibrati vettoriali*

Lemma 2.5.2. *Sia (M, g) varietà riemanniana e sia $(U; x_1, \ldots, x_n)$ una carta coordinata su M. Siano $\frac{\partial}{\partial x_i}$ i campi coordinati e dx^i la base duale associata. Allora:*

$$< dx^i, dx^j >= g^{ij}.$$

Dimostrazione. Per (**??**) troviamo che

$$dx^i(e_j) = \sum_k h^{jk} dx^i(\frac{\partial}{\partial x_k}) =$$

$$\sum_k h^{jk} \delta^i_k = h^{ji}.$$

Quindi se indichiamo con de^i l'elemento duale di e_i:

$$dx^i = \sum_j h^{ji} de^j.$$

Per come abbiamo definito il prodotto scalare indotto:

$$< dx^i, dx^j >=< \sum_k h^{ki} de^k, \sum_k h^{kj} de^k >=$$

$$\sum_k h^{ki} h^{kj} = g^{ij}.$$

□

Definizione 2.5.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana n-dimensionale. Definiamo forma volume la n-forma vol tale che*

$$< vol, vol > (p) = 1 \qquad \forall p \in M$$

e che $vol(\,) > 0$ sulle basi positivamente orientate.

Lemma 2.5.4. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia $(U; x_1, \ldots, x_n)$ una carta coordinata su M. Allora*

$$vol = \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Dimostrazione. Siano $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$ i campi coordinati. Quindi usando i lemmi precedenti, la forma volume rispetto alla metrica indotta è:

$$vol(x) = de^1(x) \wedge \cdots \wedge de^n(x) =$$

$$det(H) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n =$$

$$\sqrt{\det G(x)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

□

Dimostriamo ora un piccolo lemma di algebra lineare che ci sarà utile in seguito.

Lemma 2.5.5. *Sia $G : [0, 1] \to Gl(n, \mathbb{R})$ una funzione $\mathscr{C}^\infty$ allora:*

1.

$$\frac{d}{dt} G^{-1} = -G^{-1} \frac{dG}{dt} G^{-1}, \tag{2.3}$$

2.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \det(G(t)) = \det(G(t_0)) \cdot Tr(G^{-1}(t_0) \frac{dG}{dt}(t_0)). \tag{2.4}$$

Dimostrazione. (1)Poichè $G(t)G(t)^{-1} = Id$ derivando ottengo:

$$\frac{dG}{dt} G^{-1} + G \frac{dG^{-1}}{dt} = 0,$$

da cui (**??**),

(2) Incominciamo dimostrando che per D matrice diagonale:

$$\det(I + sD) = 1 + sTr(D) + O(s^2).$$

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ le componenti di D

$$\det(I + sD) = (1 + s\lambda_1) \cdot \cdots \cdot (1 + s\lambda_n) =$$

$$= 1 + s\lambda_1 + \ldots + s\lambda_n + O(s^2).$$

Sia A diagonalizzabile, allora esiste una matrice P ed una matrice D diagonale tale che $P^{-1}AP = D$. Quindi:

$$\det(I+sA) = \det(P^{-1})\cdot\det(P)\cdot\det(I+sA) = \det(P^{-1}P+sP^{-1}AP) =$$

$$= \det(I+sD) = 1 + sTr(D).$$

Poichè la traccia non dipende dalla base scelta:

$$\det(I+sA) = 1 + sTr(A).$$

Visto che le matrici diagonalizzibili sono dense in $Gl(n, \mathbb{R})$ e il determinante è una funzione continua allora per $A \in Gl(n, \mathbb{R})$,

$$\det(I+sA) = 1 + sTr(A).$$

Calcoliamo ora:

$$\frac{d}{dt}\det(G(T))_{t=t_0} = \lim_{t\to 0}\frac{\det(G(t_0+t)) - \det(G(t_0))}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\det(G(t_0) + t\frac{dG}{dt}(t_0)) - \det(G(t_0))}{t}.$$

Poichè $G(t) \in Gl(n, \mathbb{R})$ per ogni t allora per Binet:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\det(G(t_0) + t\frac{dG}{dt}(t_0)) - \det(G(t_0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\det(G(t_0))\frac{\det(I + tG^{-1}(t_0)\frac{dG}{dt}(t_0)) - \det(I)}{t}.$$

Applicando $\det(I + sA) = 1 + sTr(A)$ otteniamo:

$$\lim_{t\to 0}\det(G(t_0))\frac{\det(I + tG^{-1}(t_0)\frac{dG}{dt}(t_0)) - \det(I)}{t} =$$

$$= \det(G(t_0))\cdot\lim_{t\to 0}\frac{tTr(G^{-1}(t_0)\frac{dG}{dt}(t_0))}{t} =$$

$$\det(G(t_0))Tr(G^{-1}(t_0)\frac{dG}{dt}(t_0)).$$

□

Definizione 2.5.6. *Sia (M, g) una varietà orientata di dimensione m. Usando la metrica e l'orientazione introduciamo l'operatore:*

$$* : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{m-k}$$

tale che per ogni $\beta \in \mathcal{A}^{m-k}$

$$\alpha \wedge *\beta =< \alpha, \beta > vol.$$

Chiaramente $*$ è $\mathbb{R}$-lineare. Sia α una k-forma scomponibile di norma 1 e si $\tau = *\alpha$. Sia $\eta = *\tau$.

$$\alpha \wedge \tau = vol \qquad \tau \wedge \eta = vol.$$

Quindi:

$$\alpha \wedge \tau = \tau \wedge \eta = (-1)^{k(m-k)} \eta \wedge \tau.$$

Quindi:

$$*(*\alpha) = (-1)^{k(m-k)} \alpha.$$

In generale per α k-forma:

$$*(*\alpha) = (-1)^{k(m-k)} \alpha.$$

Sia $*^{-1}$ l'operatore inverso di $*$.

$$*^{-1}(*\alpha) = \alpha.$$

Quindi:

$$* = (-1)^{k(m-k)} *^{-1} .$$

e:

$$*^{-1} = (-1)^{k(m-k)} * .$$

Definizione 2.5.7. *Definiamo l'operatore*

$$d^* : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p-1}$$

come

$$d^* := (-1)^{mp+m+1} * \circ d \circ *.$$

In particolare

$$d^* \circ d^* = \pm * \circ d \circ * \circ * \circ d \circ * = \pm * \circ d^2 \circ * = 0.$$

Definizione 2.5.8. *Sia (M, g) una varietà orientata compatta. Definiamo il prodotto scalare $\mathcal{L}^2$ di forme differenziali*

$$(\phi, \psi)_{\mathcal{L}^2} = \int_M < \phi, \psi > vol = \int_M \phi \wedge *\psi.$$

Lemma 2.5.9. *Sia (M, g) una varietà orientata compatta. Allora d^* è l'aggiunto formale rispetto alla norma $\mathcal{L}^2$ dell'operatore d. Cioè*

$$(d\phi, \psi)_{\mathcal{L}^2} = (\phi, d^*\psi)_{\mathcal{L}^2} \, \forall \phi \in \mathcal{A}^p, \forall \psi \in \mathcal{A}^p.$$

Dimostrazione.

$$\int_M < d\phi, \psi > dv = \int_M d\phi \wedge *\psi =$$
$$= \int_M d(\phi \wedge *\psi) + (-1)^{p+1} \int_M \phi \wedge d(*\psi).$$

Il primo termine è zero per il teorema di Stokes. Quindi:

$$(d\phi, \psi)_{\mathcal{L}^2} =$$
$$= (-1)^{p+1} \int_M \phi \wedge d(*\psi) =$$
$$= (-1)^{p+1} (\phi, *^{-1}(d(*\psi)))_{\mathcal{L}^2} =$$
$$= (-1)^{p+1} \cdot (-1)^{(m-p)p} (\phi, *(d(*\psi)))_{\mathcal{L}^2}.$$

Studiamo ora la seguente espressione modulo 2

$$p + 1 + (m - p)p = 1 + pm + p^2 + p =$$
$$= pm + 1 + p(p + 1).$$

Poichè $p(p + 1)$ è pari:

$$pm + 1 + p(p + 1) = pm + 1.$$

Quindi se ψ è una $(p + 1)$-forma:

$$d^* = (-1)^{pm+1} * \circ d \circ *.$$

Se ψ fosse quindi una q-forma con $q = p - 1$:

$$d^* = (-1)^{(q+1)m+1} * \circ d \circ * =$$
$$= (-1)^{qm+m+1} * \circ d \circ *.$$

e questo prova la tesi. □

Come esempio vediamo la formula in coordinate dell'operatore d^* sulle 1-forme. Sia $(U; x_1, \ldots, x_n)$ una carta coordinata positiva su M. Allora da (**??**) abbiamo che:

$$vol = \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Alleggeriamo un po' la notazione usando:

$$\gamma = \det g_{ij} \qquad dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Utilizzeremo anche la convenzione di somma di Einstein. Sia $\alpha = \alpha_i dx^i$ la rappresentazione locale di α, $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Sappiamo da (**??**) che $\forall \phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$(d\phi, \alpha)_{\mathcal{L}^2} = (\phi, d^*\alpha)_{\mathcal{L}^2}.$$

Ovvero:

$$\int_M < d\phi, \alpha > vol = \int_M \phi d^*\alpha vol.$$

In coordinate:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx^i.$$

Quindi

$$< d\phi, \alpha >= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \alpha_j < dx^i, dx^j >=$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \alpha_j g^{ij},$$

per il lemma (**??**). Sia $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$. Allora:

$$(d\phi, \alpha)_{\mathcal{L}^2} = \int_M < d\phi, \alpha > vol = \int_U < d\phi, \alpha > vol =$$

$$\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_i} g^{ij} \alpha_j \sqrt{\gamma} dx =$$

integrando per parti e poichè $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$

$$= - \int_U \phi \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \alpha_j \sqrt{\gamma}) dx = - \int_M \phi \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \alpha_j \sqrt{\gamma}) dx. \tag{2.5}$$

Ma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \alpha_j \sqrt{\gamma}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij}) \alpha_j \sqrt{\gamma} + g^{ij} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \sqrt{\gamma} + \alpha_j g^{ij} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial x_i}. \tag{2.6}$$

Usando (**??**)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij} = -g^{ik}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} g^{lj},$$

invece:

$$\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial \det(g_{ij})}{\partial x_i}.$$

Usando(**??**)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\gamma g^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} =$$

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{2} g^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i}.$$

Quindi (**??**) diventa:

$$\sqrt{\gamma}\big(- g^{ij}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} g^{lk}\alpha_k + g^{ij}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2} g^{ij}\alpha_j g^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i}\big). \tag{2.7}$$

Studiamo:

$$\alpha_j\left(\frac{1}{2} g^{ij} g^{kl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} - g^{ik} g^{lj}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i}\right). \tag{2.8}$$

Poichè:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right),$$

e

$$\Gamma_{ijm} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\Big).$$

Otteniamo che:

$$\Gamma_{ijm} + \Gamma_{mji} = \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j}.$$

Sostituendo in (**??**) e contraendo gli indici:

$$\alpha_j\left(\frac{1}{2} g^{ij}\Gamma^l_{li} + \frac{1}{2} g^{ij}\Gamma^k_{ik} - g^{lj}\Gamma^i_{il} - g^{ik}\Gamma^j_{ik}\right). \tag{2.9}$$

L'espressione sopra è equivalente (scambiando nel secondo termine la l con la k e nel terzo la l con la i e la i con la k) a:

$$g^{ij}\Gamma^k_{ki} - g^{ij}\Gamma^k_{ik} - g^{ik}\Gamma^j_{ki} = -g^{ik}\Gamma^j_{ki}.$$

Abbiamo quindi che (**??**) diventa

$$\sqrt{\gamma}\left(g^{ij}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} - \alpha_j g^{ik}\Gamma^j_{ki}\right) \tag{2.10}$$

E sostituendo (**??**) in (**??**) otteniamo che:

$$d^*\alpha = -g^{ij}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} + \alpha_j g^{ik}\Gamma^j_{ki}.$$

Definiamo ora il Laplaciano sulle p-forme:

Definizione 2.5.10. *Sia (M, g) varietà orientata compatta. Poniamo $\Delta = dd^* + d^*d$.*

$$\Delta : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^p$$

Definizione 2.5.11. *Una forma α si dice armonica se*

$$\Delta(\alpha) = 0.$$

Lemma 2.5.12. *Sia (M, g) varietà orientata compatta. Allora $\Delta(\alpha) = 0$ se e solo se $d\alpha = d^*\alpha = 0$.*

Dimostrazione. In un senso è ovvio. Nell'altro, se $\Delta(\alpha) = 0$, allora

$$0 = (\Delta(\alpha), \alpha)_{\mathcal{L}^2} = (dd^*\alpha, \alpha)_{\mathcal{L}^2} + (d^*d\alpha, \alpha)_{\mathcal{L}^2} =$$

$$(d^*\alpha, d^*\alpha)_{\mathcal{L}^2} + (d\alpha, d\alpha)_{\mathcal{L}^2} = ||d^*\alpha||^2_{\mathcal{L}^2} + ||d\alpha||^2_{\mathcal{L}^2}.$$

e questo dimostra il teorema. □

Definizione 2.5.13. *Indichiamo con $\mathcal{H}^k(M)$ lo spazio delle k-forme armoniche su M.*

Decomposizione di Hodge 2.5.14. *Sia (M, g) una varietà orientata compatta. Allora esiste una decomposizione ortogonale rispetto a $(\ ,\ )_{\mathcal{L}^2}$:*

$$\mathcal{A}^k(M) = d\mathcal{A}^{k-1}(M) \oplus \mathcal{H}^k(M) \oplus d^*\mathcal{A}^{k+1}(M).$$

È facile dimostrare che è una somma diretta ortogonale. Sia infatti $\alpha \in d\mathcal{A}^{k-1}(M) \cap d^*\mathcal{A}^{k+1}(M)$. Allora esistono una forma $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ ed una forma $\gamma \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$ tali che:

$$\alpha = d\beta = d^*\gamma.$$

Calcoliamo:

$$(\alpha, \alpha)_{\mathcal{L}^2} = (d\beta, d^*\gamma)_{\mathcal{L}^2} =$$

$$(d^2\beta, \gamma)_{\mathcal{L}^2} = (0, \gamma)_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Quindi $\alpha = 0$ e dunque $d\mathcal{A}^{k-1}(M) \cap d^*\mathcal{A}^{k+1}(M) = 0$.

Sia $\alpha \in d\mathcal{A}^{k-1}(M) \cap \mathcal{H}^k(M)$. Allora esiste una forma $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ tale che $\alpha = d\beta$. Per il teorema (**??**) sappiamo che $d^*\alpha = 0$. Quindi:

$$(\alpha, \alpha) = (d\beta, \alpha)_{\mathcal{L}^2} = (\beta, d^*\alpha)_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Dunque $d\mathcal{A}^{k-1}(M) \cap \mathcal{H}^k(M) = 0$. Sia $\alpha \in d^*\mathcal{A}^{k+1}(M) \cap \mathcal{H}^k(M)$. Allora esiste una forma $\gamma \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$ tale che $\alpha = d^*\gamma$. Sempre per il teorema (**??**) sappiamo che $d\alpha = 0$. Quindi

$$0 = (\alpha, d^*\gamma)_{\mathcal{L}^2} = (d\alpha, \gamma)_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

E quindi anche $d^*\mathcal{A}^{k+1}(M) \cap \mathcal{H}^k(M) = 0$ Ragionamenti simili ci mostrano che i tre spazi sono ortogonali rispetto a $(\, , \,)_{\mathcal{L}^2}$. Che $d\mathcal{A}^{k-1}(M) \oplus \mathcal{H}^k(M) \oplus d^*\mathcal{A}^{k+1}(M)$ sia tutto $\mathcal{A}^k$ è invece un teorema di esistenza non banale che richiede alcuni elementi della teoria delle equazioni alle derivate parziali ellittiche lineari.

Teorema di Hodge 2.5.15. *Esiste un isomorfismo:*

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq H^k(M).$$

Dimostrazione. Sia α una forma armonica. Allora per (**??**) α è chiusa. Quindi ha senso studiare la sua immagine in $H^k(M)$. Sia quindi F la funzione che associa ad α la sua classe in $H^k(M)$:

$$F : \mathscr{H}^k \to H^k(M)$$

$$F(\alpha) = [\alpha].$$

Vogliamo provare che F è un isomorfismo.

Sia $F(\alpha) = 0$. Quindi α è esatta e per il teorema precedente $\alpha = 0$. Questo prova l'iniettività di F.

Sia invece $[\eta]$ in $H^k(M)$. Per il teorema di decomposizione di Hodge $\eta = \alpha + d\beta + d^*\gamma$. Poichè η è chiusa ognuno dei termini deve essere chiuso. Quindi $dd^*\gamma = 0$. Allora, indicando con $(\, , \,)$ il prodotto scalare $\mathcal{L}^2$:

$$0 = (dd^*\gamma, \gamma) = (d^*\gamma, d^*\gamma).$$

Quindi $d^*\gamma = 0$. Perciò:

$$[\eta] = [\alpha + d\beta] = [\alpha] = F(\alpha).$$

Quindi F è suriettiva. □

Capitolo 3

Varietà complesse

Una varietà complessa è una varietà differenziale su cui è presente una strutture aggiuntiva. In questo capitolo introdurremo il concetto di struttura quasi complessa e la relativa scomposizione degli spazi tangenti, gli operatori $\partial, \bar{\partial}$, il concetto di struttura integrabile, i fibrati olomorfi e le classi di Chern.

3.1 Strutture quasi complesse

Sia M una varietà differenziabile.

Definizione 3.1.1. *Una varietà M si dice quasi complessa se esiste un endomorfismo del fibrato tangente*

$$J : TM \to TM$$

tale che

$$J^2 = -id.$$

Una struttura quasi complessa ci permette di decomporre il fibrato tangente.

Teorema 3.1.2. *Sia M una varietà quasi complessa. Allora esiste una decomposizione in somma diretta*

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

in fibrati vettoriali complessi su M, tali che l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di J agisce come moltiplicazione per i su $T^{1,0}$ rispettivamente per $-i$ su $T^{0,1}$.

Dimostrazione. Ragionando fibra per fibra decomponiamo

$$T_{x\mathbb{C}}M = T_x^{1,0}M \oplus T_x^{0,1}M$$

dove $T_x^{1,0}M$ è il kernel di $J(x) - i \cdot id(x)$ e $T_x^{0,1}M$ è il kernel di $J(x) + i \cdot id(x)$. L'affermazione segue immediatamente. □

I due fibrati $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ vengono chiamati rispettivamente il fibrato tangente olomorfo ed antiolomorfo della varietà quasi complessa. Quindi per ogni varietà quasi complessa possiamo definire i fibrati vettoriali complessi

$$\bigwedge{}_{\mathbb{C}}^{k} M := \bigwedge{}^{k}(T_{\mathbb{C}}M)^* \qquad \bigwedge{}_{\mathbb{C}}^{p,q} M := \bigwedge{}^{p}(T^{1,0}M)^* \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge{}^{q}(T^{0,1}M)^*.$$

I fasci delle loro sezioni vengono indicati con i simboli $\mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^k$ e $\mathcal{A}_M^{p,q}$. Le sezioni globali di $\mathcal{A}^{p,q}$ sono chiamate forme di bigrado (p,q). Indicheremo le proiezioni $\mathcal{A}(M)^* \to \mathcal{A}^k(M)$, $\mathcal{A}(M)^* \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$ rispettivamente con Π^k e $\Pi^{p,q}$.

Corollario 3.1.3. *Esiste una decomposizione naturale in somma diretta*

$$\bigwedge{}_{\mathbb{C}}^{k} M = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge{}^{p,q} M \qquad \mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_M^{p,q}$$

Definizione 3.1.4. *Sia M una varietà quasi complessa. Se $d : \mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^k \to \mathcal{A}_{M,\mathbb{C}}^{k+1}$ l'estensione $\mathbb{C}$-lineare del differenziale esterno, allora si definiscono:*

$$\partial := \Pi^{p+1,q} \circ d \qquad \bar{\partial} := \Pi^{p,q+1} \circ d.$$

La regola di Leibniz per il differenziale esterno implica la regola di Leibniz per ∂ e $\bar{\partial}$.

Teorema 3.1.5. *Sia M una varietà quasi complessa. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $d\alpha = \partial(\alpha) + \bar{\partial}(\alpha)$ *per ogni* $\alpha \in \mathcal{A}^*M$,
2. *su* $\mathcal{A}^{1,0}(M)$ *si ha* $\Pi^{0,2} \circ d = 0$.

Dimostrazione. 1 implica 2 banalmente. Nell'altro senso, $d = \partial + \bar{\partial}$ se e solo se $d\alpha \in \mathcal{A}(M)^{p+1,q} \oplus \mathcal{A}(M)^{p,q+1}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$. Localmente α può essere scritta come una somma di termini della forma $fw_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p} \wedge w'_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_q}$. Per la linearità e la proprietà di Leibniz dell'operatore d il calcolo di questo differenziale si riduce a studiare df, dw_{i_k}, dw'_{j_l}. Chiaramente $df \in \mathcal{A}^{1,0}(M) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(M)$ e per ipotesi $dw_i \in \mathcal{A}^{2,0}(M) \oplus \mathcal{A}^{1,1}(M)$ e $dw'_j \in \mathcal{A}^{1,1}(M) \oplus \mathcal{A}^{0,2}(M)$ (per coniugio dell'ipotesi). Quindi $d\alpha \in \mathcal{A}^{p+1,q}(M) \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(M)$. □

Una struttura quasi complessa si dice integrabile se è verificata una delle due condizioni del teorema precedente. Vi sono altre caratterizzazioni equivalenti del concetto di struttura integrabile.

Teorema 3.1.6. *Una struttura quasi complessa è integrabile se e solo se il commutatore di campi vettoriali preserva* $\Gamma(T^{0,1})M$ *cioè:*

$$[\Gamma(T^{0,1}M), \Gamma(T^{0,1}M)] \subset \Gamma(T^{0,1}M).$$

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathcal{A}^{1,0}$ e siano v, w sezioni di $T^{0,1}$. Allora, usando le formule di Palais per il differenziale esterno ed il fatto che α si annulla su $T^{0,1}$:

$$(d\alpha)(v, w) = v(\alpha(w)) - w(\alpha(v)) - \alpha([v, w]) = -\alpha([v, w]).$$

Quindi $d\alpha$ non ha componenti di tipo (0,2) per ogni α se e solo se $[v, w]$ è di tipo (0,1) per ogni v, w di tipo (0,1). $\square$

Teorema 3.1.7. *Se J è una struttura quasi complessa integrabile, allora* $\partial^2 = 0$,$\bar{\partial}^2 = 0$ *e* $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$. *Al contrario, se* $\bar{\partial}^2 = 0$, *allora J è integrabile.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue da:

$$0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial + \bar{\partial}^2.$$

usando la scomposizione in bigrado. Per la seconda affermazione sia α una (0,1) forma. Siano v, w sezioni locali di $T^{0,1}M$. Quindi $(d\alpha)(v, w) = (\bar{\partial}\alpha)(v, w)$. Sia $\alpha = \bar{\partial} f$. Quindi:

$$0 = (\bar{\partial}^2 f)(v, w) = v((\bar{\partial} f)(w)) - w((\bar{\partial} f)(v)) - (\bar{\partial} f)([v, w]) =$$

$$v((df)(w)) - w((df)(v)) - (\bar{\partial} f)([v, w]) =$$

visto che $v, w \in T^{0,1}M$

$$= (d^2 f)(v, w) + (df)([v, w]) - (\bar{\partial} f)([v, w]) = 0 + (\partial f)([v, w]).$$

Poichè $d = \partial + \bar{\partial}$ su $\mathcal{A}^0$. Visto che in ogni punto le (1,0) forme del tipo $\bar{\partial} f$ generano $\wedge^{1,0}$ questo ci dice che $[v, w] \in T^{0,1}M$. $\square$

3.2 Varietà complesse

Ora introdurremo il concetto di varietà complessa e di struttura complessa.

Definizione 3.2.1. *Un atlante olomorfo su una varietà differenziabile è un atlante* (U_i, ϕ_i) *della forma* $\phi_i : U_i \simeq \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ *tale che le mappe di transizione* $\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ *sono olomorfe. Due atlanti* $\{U_i, \phi_i\}$,$\{U'_j, \phi'_j\}$ *sono detti equivalenti se tutte le mappe* $\phi_i \circ \phi_j'^{-1}$ *sono olomorfe.*

E quindi:

Definizione 3.2.2. *Una varietà complessa* M *di dimensione* n *è una varietà reale di dimensione* $2n$ *dotata di una classe di equivalenza di atlanti olomorfi.*

Al solito si definisce cosa si intende per funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ e da una varietà complessa ad un'altra.

Definizione 3.2.3. *Siano* M,N *varietà complesse.* $f : M \to (C)$ *si dice olomorfa se* $f \circ \phi_i^{-1}$ *è olomorfa per ogni carta dell'atlante olomorfo che definisce* M. $g : M \to N$ *si dice olomorfa se* $\phi'_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$ *è olomorfa per ogni carta degli atlanti olomorfi che definiscono* M *ed* N.

Si definisce in maniera usuale anche il concetto di fibrato olomorfo.

Definizione 3.2.4. *Sia* M *una varietà complessa. Un fibrato vettoriale olomorfo di rango* r *su* M *è una varietà complessa* E *con una mappa olomorfa*

$$\pi : E \to M$$

con la struttura di spazio vettoriale di dimensione r *su ogni fibra, la proprietà di banalità locale e mappe di transizione biolomorfe.*

Teorema 3.2.5. *Ogni varietà complessa ammette in maniera naturale una struttura quasi complessa.*

Dimostrazione. Il problema è puramente locale. T_xM può essere visto anche come uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n$. Siano $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$ coordinate olomorfe su U. Una base canonica di T_xM visto come spazio vettoriale reale è data da:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n},$$

Ogni T_xM ammette una struttura quasi complessa naturale:

$$J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Controlliamo che questa definisce una struttura quasi complessa definita su tutta la varietà. Siano $w_1 = u_1 + iv_1, \ldots, w_n = u_n + iv_n$ altre coordinate olomorfe su U e sia J:

$$J(\frac{\partial}{\partial u_i}) = \frac{\partial}{\partial v_i} \qquad J(\frac{\partial}{\partial v_i}) = -\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

J può essere rappresentata rispetto ad entrambe le basi reali come:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

Dove I_n è una matrice identità di dimensione n. Poichè i cambiamenti di coordinate sono olomorfi, lo jacobiano reale del cambiamento di coordinate da z_i a w_i si rappresenta con la matrice A:

$$\left(\begin{array}{c|c} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij} & (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij} \\ \hline (-\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij} & (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij} \end{array}\right).$$

Se le due matrici commutano allora J è ben definito su tutta la varietà. Usando la regola di moltiplicazione per blocchi delle matrici calcoliamo $J \cdot A$.

$$\left(\begin{array}{c|c} (-\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij} & (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij} \\ \hline (-\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij} & (-\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij} \end{array}\right).$$

Ora calcoliamo $A \cdot J$:

$$\left(\begin{array}{c|c} (-\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij} & (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij} \\ \hline (-\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij} & (-\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{ij} \end{array}\right).$$

Le due matrici coincidono quindi la struttura quasi complessa è definita su tutta la varietà. □

Teorema 3.2.6. *Se M è una varietà complessa, allora $T^{1,0}M$ è un fibrato vettoriale olomorfo.*

Dimostrazione. Nel teorema precedente abbiamo visto che se il cambio di coordinate è olomorfo allora la struttura complessa rappresentata punto per punto da

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

e lo Jacobiano del cambiamento di coordinate commutano. Abbiamo definito $T^{1,0}_x M$ come il kernel dell'omomorfismo di fibrati

$$J(x) - i \cdot Id(x).$$

Indichiamo con Jac l'estensione $\mathbb{C}$-lineare dello Jacobiano del cambiamento di coordinate. Sia J sia Id commutano con lo jacobiano del cambiamento di coordinate se il cambiamento di coordinate è olomorfo. Sia $v \in ker(J(x) - i \cdot Id(x))$. Quindi

$$J(x) \cdot Jac(x) \cdot v - i \cdot Id(x) \cdot Jac(x) \cdot v = Jac(x)(J(x) \cdot v - i \cdot Id(x) \cdot v) = 0.$$

Quindi anche $Jac(x) \cdot v$ appartiene a $T^{1,0}M$. Quindi le carte di transizione del fibrato $TM_{\mathbb{C}}$ mandano basi olomorfe in basi olomorfe. $\square$

Possiamo ora definire il fibrato tangente $\mathcal{T}_M$ e cotangente olomorfi Ω_M come il fibrato vettoriale di dimensione n con funzioni di transizione gli Jacobiani delle carte di transizione ed il suo duale. Possiamo inoltre definire il fibrato delle p-forme olomorfe come $\Omega_M^p = \bigwedge{}^p\Omega_M$. La cosa interessante è che il concetto di struttura quasi complessa integrabile è strettamente legato a quello di struttura complessa da questo difficile teorema.

Teorema (Newlander-Nirenberg) 3.2.7. *Ogni struttura quasi complessa integrabile è indotta da una struttura complessa.*

Dimostriamo ora un teorema che utilizzeremo nel seguito.

Definizione 3.2.8. *Una funzione*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

si dice pluriarmonica se:

$$\partial\bar{\partial} f = 0.$$

Teorema 3.2.9. *Sia:*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

pluriarmonica. Se f ammette un massimo o un minimo è costante. In particolare se M è compatto, f è costante.

Dimostrazione. Sia $c = \max_{\in U} f(p)$. Poniamo $\Omega = \{p \in M : f(p) = c\}$. Per la continuità di f Ω è un insieme chiuso. Dimostriamo che è anche aperto. Sia $p_0 \in \Omega$ e $(U; z_1, \ldots, z_n)$ un sistema di coordinate centrato in p_0 con U connesso.

$$\partial\bar{\partial} f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = 0$$

su U. Poichè:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = (\frac{\partial}{\partial x^i} - i\frac{\partial}{\partial y^i})(\frac{\partial}{\partial x^i} + i\frac{\partial}{\partial y^i}) = \frac{1}{4}(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}),$$

Si ha $\Delta f = 0$. Quindi f è una funzione armonica su U nel senso ordinario, ed assume il suo massimo nel punto interno p_0. Per il principio del massimo per funzioni armoniche ordinarie, f è costante nell'aperto U. Dunque $U \subset \Omega$ e quindi Ω è aperto. Poichè M è connessa $\Omega = M$ ed f è costante. $\square$

3.3 Connessione e curvatura sui fibrati complessi

Definizione 3.3.1. *Sia $\mathcal{A}^p(E) = \Gamma(M, \bigwedge{}^p(TM^*) \otimes E)$. Una connessione su un fibrato vettoriale complesso è una mappa $\mathbb{C}$-lineare*

$$\nabla : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^1(E)$$

tale che sia soddisfatta la regola di Leibniz:

$$\nabla(f \cdot s) = d(f) \otimes s + f \cdot \nabla(s)$$

per ogni funzione f su M ed ogni sezione locale s di E.

Identità di Bianchi differenziale 3.3.2. *Una connessione ∇ è un operatore locale. Cioè se una sezione s è identicamente nulla su un aperto U, allora lo è anche $\nabla(s)$*

Dimostrazione. Sia V un aperto che contiene U. Sia $p \in U$ ed f una funzione che vale 1 fuori da U e che è nulla su un intorno V di p contenuto in U. Allora $s = f \cdot s$. Allora:

$$\nabla(s) = \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s).$$

Poichè f è uguale a 0 su V anche $df = 0$ su V. Quindi

$$\nabla(s)(p) = 0.$$

Poichè $p \in U$ è arbitrario allora $\nabla(s) = 0$ su tutto U. $\square$

Quindi la connessione è un operatore locale, ossia un omomorfismo dei fasci.

Definizione 3.3.3. *Una sezione s di E è detta parallela (rispetto a ∇) se $\nabla(s) = 0$.*

Data una connessione su un fibrato vettoriale vengono indotte delle connessioni su tutti i fibrati vettoriali associati.

Teorema 3.3.4. *Siano E_1 ed E_2 due fibrati vettoriali su M dotati di connessioni ∇_1 e ∇_2 rispettivamente. Siano s_1 ed s_2 sezioni locali di E_1 ed E_2. Allora:*

1. $\nabla(s_1 \oplus s_2) = \nabla_1(s_1) \oplus \nabla_2(s_2)$ *è una connessione su* $E_1 \oplus E_2$,
2. $\nabla(s_1 \otimes s_2) = \nabla_1(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2(s_2)$ *è una connessione su* $E_1 \otimes E_2$.
3. *sia f un omomorfismo locale da E_1 ad E_2. Una connessione naturale su $Hom(E_1, E_2)$ è:*

$$\nabla(f)(s_1) = \nabla_2(f(s_1)) - f(\nabla_1(s_1)),$$

dove nel secondo termine l'omomorfismo f è applicato alla 1-forma $\nabla_1(s_1)$ a valori in E_1 secondo la regola:

$$f(\alpha \otimes t) = \alpha \otimes f(t).$$

Dimostrazione. 1. controlliamo che sia soddisfatta la regola di Leibniz:

$$\nabla(f(s_1 \oplus s_2)) = \nabla(fs_1 \oplus fs_2) =$$

$$= \nabla_1(fs_1) \oplus \nabla_2(fs_2) = (dfs_1 + f\nabla_1(s_1)) \oplus (dfs_2 + f\nabla_2(s_2)) =$$
$$= df(s_1 \oplus s_2) + f(\nabla_1(s_1) \oplus \nabla_2(s_2)).$$

2. controlliamo ancora la regola di Leibniz:

$$\nabla(f(s_1 \otimes s_2)) = \nabla((fs_1) \otimes s_2) =$$

$$= \nabla_1(fs_1) \otimes s_2 + f \cdot s_1 \otimes \nabla_2(s_2) =$$
$$= df \cdot s_1 \otimes s_2 + f\nabla_1(s_1) \otimes s_2 + fs_1 \otimes \nabla_2(s_2) =$$
$$= df \otimes s_1 \otimes s_2 + f\nabla(s_1 \otimes s_2).$$

3. e ancora:

$$\nabla(g \cdot f)(s_1) = \nabla_2(g \cdot f(s_1)) - g \cdot f(\nabla_1(s_1)) =$$

$$= dg \cdot f(s_1) + g \cdot \nabla_2(f(s_1)) - g \cdot f(\nabla_1(s_1)) =$$
$$= dg \cdot f(s_1) + g \cdot (\nabla_2(f(s_1)) - f(\nabla_1(s_1)).$$

□

L'ultima costruzione implica in particolare che, se dotiamo il fibrato banale con la connessione data dal differenziale esterno otteniamo una connessione ∇^* sul duale E^* di ogni fibrato E dotato di una connessione ∇. Esplicitamente abbiamo:

$$\nabla^*(f)(s) = d(f(s)) - f(\nabla(s)).$$

E quindi possiamo costruire una connessione su $Hom(E, E) \simeq E \otimes E^*$ in questo modo:

$$\nabla(s \otimes f) = \nabla(s) \otimes f + s \otimes \nabla^*(f).$$

Lemma 3.3.5. *Supponiamo che $E \to M$ sia un fibrato vettoriale differenziabile di rango r. Allora per ogni x appartenente ad M esiste un intorno U ed $\{e_1, \ldots, e_r\}$ con $e_j \in \mathcal{A}^0(U, E)$ tali che $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ sono una base di $\pi^{-1}(x)$. Queste sezioni vengono chiamate base locale del fibrato E.*

Dimostrazione. La definizione di fibrato chiede che per ogni $x \in M$ esista un intorno U di x tale che $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}^r$. Sia $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base di $\mathbb{C}^r$. Sia $e_i(x) = (x, z_i)$. Queste sezioni soddisfano la tesi. □

Enunciamo ora un piccolo teorema che ci permetterà di rappresentare localmente le p forme a valori in un fibrato.

Teorema 3.3.6. *Siano E ed E' due fibrati vettoriali su M. Allora esiste un isomorfismo:*

$$\tau : \mathcal{A}^0(E) \otimes_{\mathcal{A}^0(M)} \mathcal{A}^0(E') \simeq \mathcal{A}^0(E \otimes E').$$

Per cui

$$\mathcal{A}^p \otimes \mathcal{A}^0(E) \simeq \mathcal{A}^p(E)$$

e

$$\mathcal{A}^p \otimes \mathcal{A}^0(Hom(E, E)) \simeq \mathcal{A}^p(Hom(E, E)).$$

Nel seguito quando indicheremo i coefficienti di una matrice con g^i_j l'indice in alto indica le righe e l'indice in basso indica le colonne.

Sia f una base locale su U. Definiamo la matrice di connessione $\theta(\nabla, f)$ come

$$\theta(\nabla, f) = [\theta^\rho_\sigma(\nabla, f)] \qquad \theta^\rho_\sigma(\nabla, f) \in \mathcal{A}^1 M$$

ove

$$\nabla e_\sigma = \theta^\rho_\sigma(\nabla, f) e_\rho$$

(usando la convenzione di somma di Einstein). Possiamo usare la matrice di connessione per rappresentare esplicitamente l'azione di ∇ sulle sezioni di E. Sia $\xi = \xi^\rho(f) \cdot e_\rho$ nella base locale. Quindi

$$\nabla(\xi) = \nabla(\xi^\rho \cdot e_\rho) = d(\xi^\rho) \cdot e_\rho + \xi^\rho \nabla(e_\rho) =$$

$$= d(\xi^\rho) \cdot e_\rho + \xi^\rho \theta^\sigma_\rho e_\sigma).$$

Quindi:

$$\nabla \xi = (d\xi + \theta\xi)^\sigma \cdot e_\sigma,$$

se si indica con $d\xi$ il vettore colonna di forme $d\xi^p$.Per cui

$$\nabla \xi = [d + \theta]\xi.$$

Sia f' una base locale che banalizza E in un intorno V che interseca U e sia g la funzione di transizione del fibrato che manda $f|_{U\cap V}$ in $f'|_{U\cap V}$.

Indichiamo con θ' la matrice di connessione rispetto ad f'. Per $p \in U \cap V$ si ha:

$$e'_j(p) = g^i_j(p) e_i(p).$$

Abbiamo definito la matrice di connessione θ come una matrice di 1-forme tale che:

$$\nabla(e_i) = \theta^j_i e_j.$$

Quindi

$$\nabla(e'_i) = \nabla(g^j_i e_j) = dg^j_i e_j + g^j_i \theta^k_j e_k =$$
$$(dg^j_i + g^k_i \theta^j_k) e_j.$$

Inoltre:

$$\nabla(e'_i) = \theta'^j_i e'_j = \theta'^j_i g^k_j e_k = \theta'^k_i g^j_k e_j = g^j_k \theta'^k_i e_j.$$

Confrontanto i coefficienti ed usando la definizione di prodotto righe per colonne tra matrici sopra otteniamo:

$$g\theta' = dg + \theta g. \tag{3.1}$$

Siano θ una matrice di p-forme e ω una matrice di q-forme. Indichiamo con $\theta \wedge \omega$ la matrice di componenti:

$$(\theta \wedge \omega)^i_j = \theta^i_k \wedge \omega^k_j.$$

Per una p-forma ω a valori in E (sempre indicando con ω' la rappresentazione locale rispetto alla base f') $(\omega') = (\omega')^i e'_i = (\omega')^i \cdot g^j_i e_j$. Quindi:

$$\omega' = g^{-1}\omega.$$

Siano invece ω una p-forma a valori in $Hom(E, E)$ e ξ una sezione di E. Su una base locale ω può essere vista come una matrice di p-forme e ξ come un vettore. Abbiamo quindi che ω induce una mappa dalle sezioni di E alle p-forme a valori in E definita fibra per fibra nel seguente modo:

$$(\eta(x))^\sigma = \omega(x)^\sigma_\rho \xi^\rho(x).$$

Abbiamo quindi che localmente:

$$\eta(f) = \omega(f)\xi(f).$$

Sotto l'azione di una mappa di transizione del fibrato E abbiamo che:

$$\eta' = \omega'\xi',$$

$$g^{-1}\eta = \omega' g^{-1}\xi.$$

Quindi

$$\omega' = g^{-1}\omega g.$$

Definiamo un'estensione della connessione alle p-forme a valori in E in questo modo: sia ω una p-forma a valori in E, ne prendiamo la rappresentazione locale $\omega(f)$

$$\nabla(\omega(f)) = d\omega(f) + \theta(f) \wedge \omega(f).$$

Controlliamo che questa sia ben definita, cioè che sia compatibile con le funzioni di transizione del fibrato.

$$\nabla(\omega') = d\omega' + \theta' \wedge \omega' =$$

$$= d(g^{-1}\omega) + (g^{-1}dg + g^{-1}\theta g) \wedge g^{-1}\omega.$$

Poichè $d(g^{-1}) = -g^{-1}dgg^{-1}$ (vedere **??**) allora l'espressione qui sopra diventa:

$$-g^{-1}dgg^{-1} \wedge \omega + g^{-1}d\omega + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega + g^{-1}\theta g \wedge g^{-1}\omega =$$

$$= -g^{-1}dgg^{-1} \wedge \omega + g^{-1}d\omega + g^{-1}dgg^{-1} \wedge \omega + g^{-1}\theta \wedge \omega =$$

$$= g^{-1}(d\omega + \theta \wedge \omega) = g^{-1}\nabla(\omega).$$

Dunque $\nabla(\omega)$ è ben definita. Definiamo la curvatura come la mappa:

$$\Theta : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^1(E)$$

$$\Theta(\xi) = \nabla^2(\xi)$$

Per cui:

$$\nabla^2\xi = \nabla(\nabla(\xi)) =$$

$$\nabla(d\xi + \theta\xi) =$$

$$= d^2\xi + \theta \wedge d\xi + d(\theta\xi) + \theta \wedge \theta\xi =$$

Se indichiamo con $d\theta$ la matrice con componenti $(d\theta)^i_j = d(\theta)^i_j$,

$$= \theta \wedge d\xi + d\theta\xi - \theta \wedge d\xi + \theta \wedge \theta\xi.$$

Otteniamo quindi che

$$\nabla^2(\xi) = (d\theta + \theta \wedge \theta)\xi.$$

Possiamo quindi identificare localmente Θ con la matrice di 2-forme

$$\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta.$$

Prendendo il differenziale esterno di

$$g\theta' = dg + \theta g$$

otteniamo:

$$d\theta \cdot g - \theta \wedge dg = dg \wedge \theta' + g \cdot d\theta'.$$

Inoltre $\theta' = g^{-1}dg + g^{-1}\theta g$. Quindi:

$$g(d\theta' + \theta' \wedge \theta') = (d\theta + \theta \wedge \theta)g.$$

Ossia $\Theta' = g^{-1}\Theta g$. Quindi Θ si trasforma come una 2-forma a valori in $Hom(E, E)$.

Questo ci permette di definire una 2-forma globale che chiameremo curvatura e che indicheremo con $R \in \mathcal{A}^2(Hom(E, E))$, con rappresentazione locale Θ.

Le forme differenziali $\mathcal{A}^p(M, Hom(E, E))$ sono localmente matrici di p-forme. Vogliamo usare questo fatto per definire un prodotto di Lie sull'algebra $\mathcal{A}^*(M, Hom(E, E)) = \bigoplus_p \mathcal{A}^p(M, Hom(E, E))$. in modo che date due forme scomponibili $\Xi \in \mathcal{A}^p(M, Hom(E, E))$ e $\Psi \in \mathcal{A}^q(M, Hom(E, E))$ con rappresentazione su una base locale di E $\alpha \otimes A$ e $\beta \otimes B$ rispettivamente

$$[\alpha \otimes A, \beta \otimes B] = \alpha \wedge \beta \otimes [A, B].$$

Definiamo quindi:

$$[\Xi(f), \Psi(f)] = \Xi(f) \wedge \Psi(f) - (-1)^{pq}\Psi(f) \wedge \Xi(f).$$

Se g è una mappa di transizione del fibrato:

$$\Xi(fg) = g^{-1}\Xi(fg).$$

$$\Psi(fg) = g^{-1}\Psi(fg).$$

E quindi:

$$[\Xi(fg), \Psi(fg)] = g^{-1}[\Xi(f), \Psi(f)]g.$$

Identità di Bianchi differenziale 3.3.7. $d\Theta(f) = [\Theta(f), \theta(f)]$.

Dimostrazione. Sia $\theta := \theta(f)$ e $\Theta := \Theta(f)$.

$$\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta.$$

Quindi:

$$d\Theta = d^2\theta + d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta =$$
$$d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta.$$

Ma:

$$[\Theta, \theta] = [d\theta + \theta \wedge \theta, \theta] =$$
$$d\theta \wedge \theta + \theta \wedge \theta \wedge \theta - (-1)^{2 \cdot 1}(\theta \wedge d\theta + \theta \wedge \theta \wedge \theta) =$$
$$d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta.$$

□

Calcoliamo ora la curvatura della connessione indotta su $\bigwedge{}^n E$. Abbiamo visto che dato un fibrato E con connessione ∇, la connessione D indotta su $E \otimes E$ è data da:

$$D(e_1 \otimes e_2) = \nabla(e_1) \otimes e_2 + e_1 \otimes \nabla(e_2).$$

Segue direttamente che dato un fibrato E la connessione indotta su $\bigwedge^n E$ è:

$$D(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \sum_i^n (e_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n).$$

Calcoliamo quindi la curvatura indotta:

$$D^2(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \sum_i^n \Bigg(\sum_{j<i}^n (e_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(e_j) \wedge \ldots \wedge \nabla(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n) +$$
$$+ e_1 \wedge \ldots \wedge R(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n +$$
$$+ \sum_{j>i}^n (e_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(e_i) \wedge \ldots \wedge \nabla(e_j) \wedge \ldots \wedge e_n) \Bigg).$$

Studiamo questa espressione spezzandola. Abbiamo dunque che, per le proprietà del prodotto esterno:

$$\sum_i e_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_i^j e_j \wedge \ldots \wedge e_n =$$

$$\sum_i e_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_i^i e_i \wedge \ldots \wedge w_n =$$

$$\left(\sum_i \Theta_i^i\right) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n =$$
$$= Tr(\Theta) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Abbiamo invece che:

$$e_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(e_j) \wedge \ldots \wedge \nabla(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n =$$
$$e_1 \wedge \ldots \wedge \sum_k^n \theta_j^k e_k \wedge \ldots \wedge \sum_m^n \theta_i^m e_m \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Per le proprietà del prodotto esterno:

$$e_1 \wedge \ldots \wedge \sum_k^n \theta_j^k e_k \wedge \ldots \wedge \sum_m^n \theta_i^m e_m \wedge \ldots \wedge e_n =$$
$$= (\theta_j^j \theta_i^i - \theta_j^i \theta_i^j) e_1 \wedge \ldots \wedge e_i \wedge \ldots \wedge e_j \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Quindi:

$$\sum_{j<i}^n (e_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(e_j) \wedge \ldots \wedge \nabla(e_i) \wedge \ldots \wedge e_n) +$$
$$\sum_{j>i}^n (e_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(e_i) \wedge \ldots \wedge \nabla(e_j) \wedge \ldots \wedge e_n) =$$
$$\sum_{j<i}^n (\theta_j^j \theta_i^i - \theta_j^i \theta_i^j) e_1 \wedge \ldots \wedge e_i \wedge \ldots \wedge e_j \wedge \ldots \wedge e_n +$$
$$\sum_{j>i}^n (\theta_i^i \theta_j^j - \theta_i^j \theta_j^i) e_1 \wedge \ldots \wedge e_i \wedge \ldots \wedge e_j \wedge \ldots \wedge e_n =$$
$$\sum_{j<i}^n (\theta_j^j \theta_i^i - \theta_j^i \theta_i^j - \theta_j^j \theta_i^i + \theta_j^i \theta_i^j) e_1 \wedge \ldots \wedge e_i \wedge \ldots \wedge e_j \wedge \ldots \wedge e_n = 0.$$

Quindi la curvatura indotta su $\bigwedge^n E$ è:

$$\Theta' = Tr(\Theta).$$

Definizione 3.3.8. *Sia E un fibrato vettoriale olomorfo. Definiamo la mappa*

$$\bar{\partial}_E : \mathcal{A}^k(E) \to \mathcal{A}^{k+1}(E),$$

mediante la seguente regola sulle forme scomponibili, in rappresentazione locale:

$$\bar{\partial}_E(\alpha \otimes s) = \bar{\partial}(\alpha) \otimes s \; \alpha \in \mathcal{A}^k, s \in \mathcal{A}^0(E).$$

Supponiamo di avere un'altra banalizzazione di E e sia g la mappa di transizione. Poichè E è olomorfo le mappe di transizione sono olomorfe. Allora:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_E(\alpha \otimes s') = \bar{\partial}_E(\alpha \otimes gs) = dbar_E(\alpha g^{-1} \otimes s) = \\ = \bar{\partial}(\alpha)g^{-1} \otimes s = \bar{\partial}(\alpha) \otimes g \cdot s = \bar{\partial}_E(\alpha \otimes \cdot s).\end{aligned}$$

Evidentemente $\bar{\partial}_E^2 = 0$. Questo ci permette di definire un complesso differenziale di fasci:

$$0 \to \Omega^p(E) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{p,1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{p,2}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{p,n}(E) \to 0$$

che è una risoluzione del fascio $\Omega^p(E)$.

Teorema di Dolbeaut 3.3.9. *Sia M una varietà complessa e sia $E \to M$ un fibrato vettoriale olomorfo. Allora:*

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \simeq \frac{Ker(\bar{\partial}_E : \mathcal{A}^{p,q}(E) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(E))}{Im(\bar{\partial}_E : \mathcal{A}^{p,q-1}(E) \to \mathcal{A}^{p,q}(E))}.$$

Definizione 3.3.10. *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale olomorfo. Usando la scomposizione in bigrado possiamo scomporre anche la connessione in:*

$$\begin{aligned}\nabla' : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^{1,0}(E), \\ \nabla'' : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E).\end{aligned}$$

Diciamo che la connessione ∇ è compatibile con la struttura olomorfa se $\nabla'' = \bar{\partial}_E$.

Teorema 3.3.11. *Sia (E, h) un fibrato hermitiano olomorfo. Allora esiste una sola connessione compatibile con la metrica e la struttura olomorfa. Questa connessione viene chiamata connessione di Chern.*

Dimostrazione. Proviamo prima l'esistenza e l'unicità locale. Questo è un problema puramente locale. Quindi possiamo assumere che E sia il fibrato olomorfo banale $E = M \times \mathbb{C}^r$. Sulla base locale la connessione ∇ è della forma $\nabla = d + \theta$ dove θ è una matrice di 1-forme. Sia e_i il vettore costante di norma 1 considerato come una sezione di E. Allora (usando la convenzione di somma di Einstein) ∇ è compatibile con la metrica se e solo se:

$$dh(e_i, e_j) = h(\theta_i^k e_k, e_j) + h(e_i, \theta_j^l e_l).$$

O in maniera equivalente:

$$dH = \theta^t \cdot H + H \cdot \bar{\theta}.$$

D'altronde ∇ è compatibile con la struttura olomorfa se e solo se la matrice θ è di bigrado $(1,0)$. Quindi confrontando i tipi su entrambi i lati otteniamo:

$$\bar{\partial}H = H \cdot \bar{\theta}.$$

Coniugando otteniamo:

$$\theta = \bar{H}^{-1}\partial(\bar{H}).$$

Quindi θ è determinata da H. Abbiamo quindi visto che localmente esiste una connessione compatibile con entrambe le strutture (quella olomorfa e quella hermitiana). Siano quindi U_i ed U_j due intorni banalizzanti di E tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Su U_i ed U_j sono definite due connessioni di Chern locali che chiameremo ∇ e ∇'. Su $U_i \cap U_j$ sono definite entrambe. Dall'unicità locale della connessione di Chern le due connessioni devono coincidere su $U_i \cap U_j$. Quindi esiste una connessione di Chern definita globalmente. $\square$

3.4 Classi di Chern e teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch

Le classi di Chern sono degli invarianti topologici di un fibrato vettoriale. Possono essere definite per mezzo della geometria differenziale in funzione della forma di curvatura del fibrato. Mostreremo che possono essere viste come una ostruzione alla banalizzazione del fibrato.

Definizione 3.4.1. *Sia $\mathcal{M}_r$ l'insieme delle matrici $r \times r$ a coefficienti complessi. Una k-forma lineare simmetrica $\tilde{\phi}$:*

$$\tilde{\phi} : \mathcal{M}_r \times \cdots \times \mathcal{M}_r \to \mathbb{C}$$

è detta invariante se:

$$\tilde{\phi}(gA_1g^{-1}, \cdots, gA_kg^{-1}) = \tilde{\phi}(A_1, \cdots, A_k)$$

per ogni $g \in GL(r, \mathbb{C}), A_i \in \mathcal{M}_r$.

Sia $\tilde{I}_k(\mathcal{M}_r)$ lo spazio vettoriale complesso delle k-forme simmetriche invarianti su $\mathcal{M}_r$. Chiamiamo ϕ il polinomio di grado k nei coefficienti di A:

$$\phi(A) = \tilde{\phi}(A, \cdots, A).$$

Si verifica facilmente che $\phi(gAg^{-1}) = \phi(A)$. Un polinomio di questo viene detto invariante. Chiamiamo $I_k(\mathcal{M}_r)$ l'insieme dei polinomi di grado k invarianti.

Sia $\phi \in I_k(\mathcal{M}_r)$. Allora:

$$\tilde{\phi}(A_1, \dots, A_k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i_1 < \dots < i_j} (-1)^j \phi(A_{i_1} + \dots + A_{i_j})$$

è un elemento in $\tilde{I}_k(\mathcal{M}_r)$ tale che

$$\tilde{\phi}(A, \dots, A) = \phi(A).$$

Estendiamo l'azione di $\tilde{\phi} \in \tilde{I}_k(\mathcal{M}_r)$ a $\mathcal{A}^p(Hom(E, E))$. Sia U un intorno banalizzante di $\mathcal{A}^p(Hom(E, E))$. Siano $A_i \otimes w_i \in \mathcal{A}^p(Hom(E, E))|_U$. Poniamo

$$\phi_U(A_1 \otimes w_1, \cdots, A_k \otimes w_k) = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k \cdot \phi(A_1, \cdots, A_k).$$

Per l'invarianza di ϕ la definizione è covariante rispetto alle funzioni di transizione del fibrato. Quindi ϕ_U si può estendere ad una mappa:

$$\phi_M : \mathcal{A}^p(Hom(E, E)) \times \ldots \mathcal{A}^p(Hom(E, E)) \to \mathcal{A}^{pk}(M).$$

Valutandolo in $(A, \dots, A)$ otteniamo un'applicazione:

$$\phi_M : \mathcal{A}^p(Hom(E, E)) \to A^{pk}(M).$$

Supponiamo di avere una connessione su E. La curvatura si può esprimere localmente una matrice di 2-forme $\Theta_E(\nabla)$. Quindi $\phi_M(\Theta_E(\nabla))$ è una $2k$-forma globale su M.

Teorema 3.4.2. *Sia E un fibrato vettoriale complesso differenziabile, sia ∇ una connessione su E e sia $\phi \in I_k(\mathcal{M}_r)$. Allora*

1. *$\phi_M(\Theta_E(\nabla))$ è chiusa,*
2. *l'immagine di $\phi_M(\Theta_E(\nabla))$ in $H^{2k}(M, \mathbb{C})$ è indipendente dalla connessione ∇. La classe $[\phi_M(\Theta_E(\nabla)] \in H^*_{dR}(M)$ è detta classe caratteristica di E corrispondente al polinomio ϕ.*

Dimostrazione. 1. Sia $\phi \in I_k(\mathcal{M}_r)$. Siano $f(t)$ e $g(t)$ due serie di potenze a coefficienti matriciali che convergono per ogni $t \in \mathbb{C}$

$$f(t) = \sum A_n t^n \qquad g(t) = \sum B_n t^n,$$

allora

$$f(t)g(t) = A_0 B_0 + (A_1 B_0 + A_0 B_1)t + O(|t|^2).$$

Quindi:

$$\exp^{-tB} A \exp^{tB} - A = t[A,B] + O(|t|^2). \tag{3.2}$$

Supponiamo per semplicità $k = 2$. Sia ϕ la forma bilineare associata a ϕ. Dall'invarianza di questa forma:

$$\phi(\exp^{-tB} A_1 \exp^{tB}, \exp^{-tB} A_2 \exp^{tB}) - \phi(A_1, A_2) = 0.$$

Aggiungendo e sottraendo $\phi(\exp^{-tB} A_1 \exp^{tB}, A_2)$ otteniamo:

$$\phi(\exp^{-tB} A_1 \exp^{tB}, \exp^{-tB} A_2 \exp^{tB}) - \phi(\exp^{-tB} A_1 \exp^{tB}, A_2)$$

$$+\phi(\exp^{-tB} A_1 \exp^{tB}, A_2) - \phi(A_1, A_2) = 0.$$

Applicando (**??**) a ciascuno dei termini otteniamo:

$$\phi(\exp^{-tB} A_1 \exp^{tB}, t[A_2, B] + O(|t|^2)) + \phi(t[A_1, B] + O(|t|^2), A_2) =$$

$$= t\{\phi(A_1, [A_2, B]) + \phi([A_1, B], A_2)\} + O(|t|^2) = 0.$$

Quindi $\phi(A_1, [A_2, B]) + \phi([A_1, B], A_2) = 0$. Questo ragionamento si generalizza facilmente al grado k. Abbiamo quindi che

$$\sum_{j=1}^{k} \phi(A_1, \ldots, [A_j, B], \ldots, A_k) = 0, \tag{3.3}$$

per ogni $A_j, B \in \mathbb{M}_r$. Usando la definizione del prodotto di Lie sull'algebra esterna, abbiamo che su un aperto U:

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{f(i)} \phi_U(A_1, \ldots, [A_i, B], \ldots, A_k) = 0,$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{A}^p(Hom(E,E))$, $B \in \mathcal{A}^q(Hom(E,E))$ ed

$$f(i) = \deg B \sum_{j \le i} \deg(A_j).$$

Inoltre, segue dalla definizione di forma k-lineare che:

$$d(\phi_U(A_1, \ldots, A_k)) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{g(i)} \phi_U(A_1, \ldots, dA_i, \ldots, A_k)$$

per $A_\alpha \in \mathcal{A}^p(Hom(E,E))$ dove $g(i) = \sum_{j<i} \deg A_j$. Sia quindi Θ la matrice di curvatura sulla base locale f. Poichè il grado di Θ è pari:

$$d(\phi_U(\Theta)) = d(\phi_U(\Theta, \ldots, \Theta)) = \sum \phi_U(\theta, \ldots, d\Theta, \ldots, \Theta).$$

Quindi usando l'identità di Bianchi differenziale:

$$d(\phi_U(\Theta)) = \sum \phi_U(\Theta, \ldots, [\Theta, \theta], \ldots, \Theta).$$

Ma questo è zero per (**??**) e quindi $\Phi_X(\Theta_E)$ è una forma chiusa.

2. Visto che la forma è chiusa ha senso considerare la sua classe nel gruppo di De Rham $H^{2k}(M, \mathbb{C})$. Sia $\alpha(t)$ una famiglia ad un parametro di forme differenziali su M. In coordinate locali (dove I indica un multiindice):

$$\alpha(t) = \sum \alpha_I(x,t) dx_I.$$

e

$$\dot{\alpha} = \sum \frac{\partial \alpha_I}{\partial t} dx_I,$$

$$\int_a^b \alpha = \sum \Big(\int_a^b \alpha_I \Big) dx_I.$$

Inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha(t) \wedge \beta(t) = \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \wedge \beta(t) + \beta(t) \wedge \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t},$$

$$\int_a^b \dot{\alpha(t)} dt = \alpha(t)|_a^b = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Sia D_t una famiglia ad un parametro di connessioni su E, cioè una famiglia di connessioni le cui matrici di connessione hanno in ogni base locale coefficienti che sono una famiglia ad un parametro di forme differenziali su E. Allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} D_t(\xi(f)) = \frac{\partial}{\partial t}(d\xi(f) + \theta_t(f)\xi(f)) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} \theta_t(f) \Big) \xi(f).$$

Per ogni t_0 fissato questo definisce una mappa:

$$\dot{D}_{t_0} : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^1(E),$$

$$\dot{D}_{t_0}(\xi) = \frac{\partial}{\partial t} D_t \xi|_{t_0}.$$

Quindi $\dot{D}_{t_0}$ è un elemento di $\mathcal{A}^1(Hom(E,E))$. Indichiamo con

$$\phi'(\xi,\eta) = \sum_i^k \phi(\xi,\xi,\ldots,\eta,\xi,\ldots,\xi),$$

dove η è nella i-esima posizione. Indichiamo con Θ la matrice di curvatura della connessione D_t rispetto alla base locale f e con il punto indichiamo la differenziazione rispetto alla variabile t.

$$d(\phi'_U(\Theta,\dot{\theta})) = d\sum \phi_U(\Theta,\ldots,\dot{\theta},\ldots,\Theta) =$$

$$\sum_j\{\sum_{i<j}\phi_U(\Theta,\ldots,d\Theta,\ldots,\dot{\theta},\ldots,\Theta) + \phi_U(\Theta,\ldots,d\dot{\theta},\ldots,\Theta)$$

$$-\sum_{i>j}\phi_U(\Theta,\ldots,\dot{\theta},\ldots,d\Theta,\ldots,\Theta)\}.$$

Aggiungendo e sottraendo

$$\sum_j^k \phi_U(\Theta,\ldots,[\dot{\theta},\theta],\ldots,\Theta),$$

dall'equazione precedente e notando che

$$\dot{\Theta} = d\dot{\theta} + [\dot{\theta},\theta],$$

$$d\Theta = [\Theta,\theta],$$

otteniamo l'equazione:

$$d\phi'_U(\Theta,\dot{\theta} = \sum_j \phi_U(\Theta,\ldots,\dot{\Theta},\ldots,\Theta) + \sum_j\{\sum_{i<j}\phi_U(\Theta,\ldots,[\Theta,\theta],\ldots,\dot{\theta},\ldots,\Theta)$$

$$-\phi_U(\Theta,\ldots,[\dot{\theta},\theta],\ldots,\Theta) - \sum_{i>j}(\Theta,\ldots,\dot{\theta},\ldots,[\Theta,\theta],\ldots,\Theta)\}.$$

Per quanto abbiamo dimostrato prima sul differenziale di un polinomio valutato sui commutatori l'ultima somma è nulla, dunque:

$$d(\phi'_U(\Theta,\dot{\theta})) = \sum_j \phi_U(\Theta,\ldots,\dot{\Theta},\ldots,\Theta) = \phi'_U(\Theta,\dot{\Theta}).$$

Quindi:

$$\phi_M(\Theta_b) - \phi_M(\Theta_a) = d\left(\int_a^b \phi'(\Theta_t,\dot{\Theta}_t)dt\right)$$

Siano D_1 e D_2 due connessioni su E. Sia $D_t = tD_1 + (1-t)D_2$ che è chiaramente una famiglia ad un parametro di connessioni. Quindi:

$$\phi_M(\Theta_E(D_1)) - \phi_M(\Theta_E(D_2)) = d\left(\int_0^1 \phi'_M(\Theta_t, \dot{\Theta}_t)dt\right).$$

□

Consideriamo ora i polinomi invarianti $\Phi_k(A) \in I(\mathcal{M}_r)$ definiti dall'equazione

$$det(I + A) = \sum_k \Phi_k(A) \qquad A \in \mathcal{M}_r.$$

Definizione 3.4.3. *Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale differenziabile equipaggiato con una connessione ∇. Allora definiamo la k-esima forma di Chern rispetto alla connessione ∇ come:*

$$c_k(E, \nabla) = (\Phi_k)_M(\frac{i}{2\pi}\Theta_E(\nabla)).$$

La forma di Chern totale relativa a ∇ è definita come

$$c(E, \nabla) = \sum_{k=0}^{r} c_k(E, \nabla) \qquad r = rango(E).$$

La k-esima classe di Chern, $c_k(E)$, è la classe di coomologia di $c_k(E, \nabla)$ in $H^{2k}(M, \mathbb{C})$. La classe totale di Chern $c(E)$ è la classe di coomologia di $c(E, \nabla)$ in $H^*(M, \mathbb{C})$.

Dal teorema segue che le classi di Chern sono ben definite ed indipendenti dalla connessione usata per definirle. Quindi le classi di Chern sono invarianti topologici che vivono nella coomologia della base del fibrato E.

Proposizione 3.4.4. *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale hermitiano, compatibile con la metrica h. Allora la forma di Chern $c(E, \nabla)$ è una forma differenziale reale e quindi $c(E) \in H^*(M, \mathbb{R})$.*

In particolare poichè la curvatura indotta su $\bigwedge^n E$ è:

$$\Theta' = Tr(\Theta),$$

abbiamo che $c_1(E) = c_1(\bigwedge^n E)$

Proviamo ora alcune proprietà funtoriali delle classi di Chern.

Teorema 3.4.5. *Supponiamo che E ed E' siano fibrati vettoriali complessi differenziali su una varietà differenziabile M, allora:*

1. *Se* $\phi : N \to M$ *è una mappa differenziabile tra varieta differenziabili, allora:*
$$c(\phi^* E) = \phi^* c(E)$$
dove $\phi^* E$ *è il fibrato pull-back,*

2. $c(E \oplus E') = c(E) \cup c(E')$,

3. $c(E)$ *dipende solo dalla classe di isomorfismo di* E,

4. *se* E^* *è il duale di* E *allora:*
$$c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E).$$

Ora studiamo come le classi di Chern rappresentino l'ostruzione alla banalizzazione dei fibrati vettoriali.

Teorema 3.4.6. *Sia* $E \to M$ *un fibrato vettoriale differenziabile di rango* r. *Allora:*

1. $c_0(E) = 1$

2. *Se* $E \simeq M \times \mathbb{C}^r$ *è banale, allora* $c_j(E) = 0$ *per* $j = 1, \ldots, r$

3. *Se* $E \simeq E' \oplus T_s$ *dove* T_s *è un fibrato vettoriale banale di rango* s, *allora* $c_j(E) = 0$ *per* $j = r - s + 1, \ldots, r$.

Dimostrazione. 1. Ovvio dalla definizione di classe di Chern.

2. Se $E = M \times \mathbb{C}^r$ allora $\mathcal{A}^0(E) = (\mathcal{A}^0(M))^r$ e possiamo definire una connessione:
$$D(\xi) = d\xi,$$
Quindi la curvatura è zero e abbiamo:
$$c(E, D) = det(I + 0) = 1.$$

3. $c(E) = c(E' \oplus T_s) = c(E') \cup c(T_s) = c(E') \cup 1$. E' è di rango $r - s$ e quindi:
$$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_r(E) = 1 + c_1(E') + \cdots + c_{r-s}(E'),$$
da cui segue la tesi.

□

Definizione 3.4.1. *Il carattere di Chern $ch(E)$ è la classe caratteristica associata al polinomio*

$$\phi(A) = Tr\exp(A).$$

Definizione 3.4.2. *La classe di Todd $Td(E)$ è la classe caratteristica associata al polinomio*

$$\phi(A) = \det\left(\frac{1}{Id - e^{-A}}\right).$$

Concludiamo questo capitolo ricordando il seguente teorema fondamentale che collega le classi caratteristiche alla coomologia del fascio delle sezioni olomorfe di un fibrato olomorfo su una varietà complessa. Ricordiamo che se $E \to M$ è un fibrato olomorfo su una varietà complessa, la caratteristica di Eulero-Poincaré (olomorfa) di E è definita dalla formula:

$$\chi(E) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q h^q(M, \mathcal{O}_M(E)).$$

Qui h^q indica la dimensione (complessa) del q-esimo gruppo di coomologia del fascio strutturale $\mathcal{O}_M$.

Il seguente teorema afferma che questo numero è un invariante topologico di E.

Teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch 3.4.1. *Sia E un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà compatta complessa. Allora la sua caratteristica di Eulero-Poincaré è data da:*

$$\chi(E) = \int_M ch(E)td(M).$$

Capitolo 4

Varietà Kähleriane

4.1 Definizione e formulazioni equivalenti

Definizione 4.1.1. *Sia M una varietà complessa. Una metrica Riemanniana g si dice hermitiana se per ogni $x \in M$ g_x è compatibile con la struttura quasi complessa, cioè:*

$$g_x(X(x), Y(x)) = g_x(J(X(x)), J(Y(x))).$$

Definiamo $\omega := g(J(\,), (\,))$. Poichè

$$\omega(X, Y) = g(J(X), Y) = g(-X, J(Y)) =$$

$$= -g(X, J(Y)) = -g(J(Y), X) = -\omega(Y, X),$$

ω appartiene a $\mathcal{A}^2(M)$. Per la decomposizione in forme di tipo (p, q) abbiamo che:

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma,$$

dove α è di bigrado $(2, 0)$, β è di bigrado $(1, 1)$ e γ è di bigrado $(0, 2)$. Quindi:

$$\omega(X, Y) = \alpha(X, Y) + \beta(X, Y) + \gamma(X, Y),$$

$$\omega(J(X), J(Y)) = \alpha(J(X), J(Y)) + \beta(J(X), J(Y)) + \gamma(J(X), J(Y)).$$

Per la definizione di forme di tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$:

$$\omega(J(X), J(Y)) = -\alpha(X, Y) + \beta(X, Y) - \gamma(X, Y).$$

Ma

$$\omega(J(X), J(Y)) = g(J(J(X)), J(Y)) = g(J(X), Y) = \omega(X, Y).$$

Quindi:

$$-\alpha(X,Y)+\beta(X,Y)-\gamma(X,Y)=\alpha(X,Y)+\beta(X,Y)+\gamma(X,Y).$$

Dunque $\alpha+\gamma=0$ E per la decomposizione in bigrado $\alpha=0$ e $\gamma=0$. Quindi ω appartiene ad $\mathcal{A}^{1,1}(M)$.

Definizione 4.1.2. *Chiamiamo forma fondamentale ω la $(1,1)$ forma:*

$$\omega(X,Y)=g(J(X),Y).$$

Lemma 4.1.3. *Sia h una metrica hermitiana. Allora la forma bilineare h*

$$h:=g-i\cdot\omega$$

è una forma hermitiana definita positiva su TM_J, il fibrato vettoriale TM con la struttura complessa indotta da J.

Dimostrazione. Essendo h somma di forme definite globalmente è definita globalmente. Mostriamo che l'affermazione è valida fibra per fibra. $h(x)$ è evidentemente $\mathbb{R}$-lineare. Indichiamo $h(x)$ con $(\ ,\ )$, $g(x)$ con $<,>$.

Siano X,Y due elementi di T_xM_J

$$(X,X)=<X,X>-i\cdot<J(X),X>=<X,X>>0$$

per ogni $X\neq 0$, poichè $<J(X),X>=0$.

In più

$$(X,Y)=<X,Y>-i<J(X),Y>=<Y,X>+i<J(Y),X>=\overline{(X,Y)}.$$

Inoltre

$$(J(X),Y)=<J(X),Y>-i<J^2(X),Y>=$$

$$=<J(J(X)),J(Y)>+i\cdot<X,Y>=i\cdot(i\cdot<X,J(Y)>+<X,Y>)=$$

$$=i\cdot(X,Y).$$

Quindi è $\mathbb{C}$-lineare nella prima entrata.

$$(X,J(Y))=<X,J(Y)>-i\omega(X,J(Y))=$$

$$=-<J(X),Y>-i\cdot<X,Y>=-i(<X,Y>-i\omega(X,Y))=$$

$$=-i\cdot(X,Y).$$

Ed è $\mathbb{C}$-antilineare nella seconda entrata. E questo prova l'affermazione. □

Possiamo anche considerare l'estensione di g ad una metrica hermitiana definita positiva $g_{\mathbb{C}}$ su $TM_{\mathbb{C}}$ definita fibra per fibra come:

$$g_{\mathbb{C}}(X \otimes \lambda, Y \otimes \mu) := \lambda\bar{\mu} \cdot g(X, Y).$$

Teorema 4.1.4. *La decomposizione $TM_{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ è ortogonale rispetto ad $g_{\mathbb{C}}$.*

Dimostrazione. Lo dimostriamo fibra per fibra. Sia $X \in T_x^{1,0}M$ ed $Y \in T_y^{0,1}M$. Allora esistono V e W in TM tali che:

$$X = V - iJ(V) \qquad Y = W + iJ(W).$$

$$g_{\mathbb{C}}(x)(X, Y) = g_{\mathbb{C}}(x)(V - iJ(V), W + iJ(W)) =$$

$$g_{\mathbb{C}}(x)(V, W) - i \cdot g_{\mathbb{C}}(x)(V, J(W)) - i \cdot g_{\mathbb{C}}(x)(J(V), W) - g_{\mathbb{C}}(x)(J(V), J(W)) = 0$$

□

Lemma 4.1.5. *Usando l'isomorfismo canonico $T_xM_J \simeq T_x^{1,0}M$ si ha:*

$$\frac{1}{2}h(x) = g_{\mathbb{C}}(x)|_{T^{1,0}M}.$$

Dimostrazione. L'isomorfismo canonico è dato da $v \mapsto \frac{1}{2}(v - iJ(v))$. Usando le definizioni:

$$g_{\mathbb{C}}(x)(v - iJ(v), v' - iJ(v')) =$$
$$= g(x)(v, v') + ig(x)(v, J(v')) - ig(x)(J(v), v') + g(x)(J(v), J(v')) =$$
$$= 2g(x)(v, v') + 2ig(v, J(v')) = 2h(x)(v, v').$$

□

Spesso è utile fare i calcoli in coordinate. Vediamo come possiamo esprimere i prodotti scalari $h(x)$ e $g(x)$ una volta che abbiamo scelto delle basi adatte di $T_x^{1,0}(M)$ e di T_xM_J. Sia $(U; z_1, \ldots, z_n)$ una carta coordinata olomorfa in un intorno U di x. Sia $\frac{\partial}{z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ la base olomorfa di $T_x^{1,0}M$ data dai campi coordinati. Per definizione

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - iJ\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)$$

con $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_xM_J$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} := J\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n} := J\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

è una base reale di T_xM e
$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$
è una base complessa di TM_J. La forma bilineare hermitiana $g_{\mathbb{C}}(x)$ rispetto alla base $\frac{\partial}{\partial z_i}$ è rappresentata in coordinate da una matrice hermitiana. Siano

$$h_{ij} := 2g_{\mathbb{C}}(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j})$$

Per (**??**) otteniamo che:

$$h(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = h_{ij}(x).$$

Poichè h è hermitiana su (TM, J) abbiamo che:

$$h(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = -ih_{ij}(x),$$

$$h(x)(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = h_{ij}(x).$$

Per la definizione di h abbiamo che $\omega(x) = -Im(h(x)(\, , \,))$ e $g(x) = Re(h(x)(\, , \,).$ Quindi:

$$\omega(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \omega(x)(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = -Im(h_{ij}(x)),$$

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = Re(h_{ij}),$$

$$g(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g(x)(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = Re(h_{ij}(x)),$$

$$g(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = Im(h_{ij}(x)).$$

Dunque:

$$\omega(x) = -\sum_{i<j} Im(h_{ij}(x)(dx^i \wedge dx^j + dy^i \wedge dy^j) + \sum_{i,j=1}^{n} Re(h_{ij}(x))dx^i \wedge dy^j.$$

Usando

$$dz^i \wedge d\bar{z}^j = (dx^i + idy^i) \wedge (dx^j - idy^j) = dx^i \wedge dx^j - i(dx^i \wedge dy^j + dx^j \wedge dy^i) + dy^i \wedge dy^j),$$

otteniamo che:

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

Se

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

è una base ortonormale per $g(x)$, allora:

$$\omega(x) = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{n} dz^i \wedge d\bar{z}^i.$$

Definizione 4.1.6. *Sia (M, g) una varietà complessa compatta hermitiana e sia J la struttura quasi complessa associata alla struttura complessa. Se la 2-forma ω è chiusa si dice che la metrica g è Kähleriana. In generale si dice che una varietà è di Kähler se ammette una metrica di Kähler.*

Abbiamo quindi una metrica definita positiva h su $T^{1,0}M$. Sia D la connessione di Levi-Civita di g. Siano X, Y due sezioni di $T^{1,0}M$ per (**??**) il loro commutatore è ancora una sezione di $T^{1,0}M$. Sia nel seguito ∇ la connessione di Chern di $T^{1,0}M$.

Teorema (Condizioni di Kähler) 4.1.7. *Sia (M^n, g) una varietà hermitiana. Indicheremo con D la connessione di Levi-Civita di g. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$DJ = 0$, cioè $D(J(X)) = JD(X))$*
2. *$d\omega = 0$,*
3. *per ogni $p \in M$ esistono coordinate locali olomorfe in un intorno di p tali che $h_{i\bar{j}}(p) = \delta^i_j$ e $dh_{i\bar{j}}(p) = 0$,*
4. *la connessione di Chern di $(T^{1,0}M, g_{\mathbb{C}})$ coincide per mezzo dell'isomorfismo canonico*

$$\Xi : TM \to T^{1,0}M$$
$$v \mapsto \frac{1}{2}(v - iJ(v))$$

con la connessione di Levi-Civita su (TM, g),

Dimostrazione. (1) implica (2): D è compatibile con la metrica, quindi, date due sezioni di TM

$$d(g(X,Y)) = g(D(X), Y) + g(X, D(Y)).$$

Dalle formule di Palais per il differenziale esterno e poichè D è priva di torsione:

$$d\omega(X,Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(X,Z)) + Z(\omega(X,Z))$$

$$-\omega(D_X Y - D_Y X, Z) + \omega(X, D_Y Z - D_Z Y) + \omega(D_X Z - D_Z X, Y).$$

Sappiamo inoltre che:

$$(D_X\omega)(Y,Z)) = -\omega(D_X Y, Z) - \omega(Y, D_X Z) + X(\omega(Y,Z)).$$

Quindi:

$$d\omega(X,Y,Z) = (D_X\omega)(Y,Z) - (D_Y\omega)(X,Z) + (D_Z\omega)(Y,X).$$

Ma $\omega(X,Y) = g(J(X),Y)$. Quindi:

$$(D_X\omega)(Y,Z) = -\omega(D_X Y, Z) - \omega(Y, D_X Z) + X(\omega(Y,Z)) =$$

$$= g(J(D_X Y), Z) + g(J(Y), D_X Z) - Xg(J(Y), Z).$$

Poichè $D(J(X)) = J(D(X))$ otteniamo:

$$(D_X\omega)(Y,Z) =$$

$$g(D_X(I(Y)), Z) + g(I(Y), D_X Z) - Xg(I(Y), Z) =$$
$$= D_X(g(I(Y), Z).$$

Per la compatibilità della connessione di Levi-Civita con la metrica quest'ultima espressione è 0. Quindi

$$d\omega(X,Y,Z) = 0.$$

(2) implica (3): Fissiamo un punto p in M. Sia U un aperto coordinato di p e $(U; z_1, \ldots, z_n)$ una carta coordinata centrata in p. Con un cambio di coordinate lineare possiamo assumere che

$$h_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Quindi, usando l'espansione in serie di Taylor otteniamo:

$$h_{ij} = \delta_{ij} + \sum_k a_{ijk} z_k + \sum_k a'_{ijk} \bar{z}_k + O(|z|^2).$$

Inoltre:

$$a_{ijk} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k}(0) \qquad a'_{ijk} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial \bar{z}_k}(0).$$

ω è d chiusa se e solo se ω è ∂-chiusa e $\bar{\partial}$-chiusa. Poichè ω è reale, allora ω è ∂-chiusa se e solo se è $\bar{\partial}$-chiusa. Calcoliamo quindi $\partial\omega$:

$$\partial\omega = \frac{i}{2}\sum_{i,j,k}\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k}dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

Poichè la decomposizione di $TM_{\mathbb{C}}$ è ortogonale rispetto ad h abbiamo che la condizione di ∂-chiusura si traduce in:

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial z_i}.$$

Quindi l'assunzione che $d\omega = 0$ implica che $a_{ijk} = a_{kji}$ e $a'_{ijk} = a'_{ikj}$. Poichè ω è reale $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$ e quindi $a'_{ijk} = \bar{a}_{jik}$. Definiamo quindi nuove coordinate in un intorno dell'origine come:

$$w_j := z_j + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ijk}z_i z_k.$$

Controlliamo che le nuove coordinate soddisfano la tesi.

$$dw_j = dz_j + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ijk}z_k dz_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ijk}z_i dz_k =$$

$$= dz_j + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ijk}z_k dz_i, \text{ Si noti che stiamo sfruttando } d\omega = 0$$

Analogamente

$$d\bar{w}_j = d\bar{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} a'_{jik}\bar{z}_k d\bar{z}_i.$$

Quindi, se

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}dz^i \otimes d\bar{z}^j,$$

sostituendo l'espansione di h_{ij} nell'intorno di 0 otteniamo:

$$h = \sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij} + \sum_k a_{ijk}z_k + \sum_k a'_{ijk}\bar{z}_k + O(|z|^2))dz^i \otimes d\bar{z}^j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}dz^i \otimes d\bar{z}^j + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_k a_{ijk}z_k dz^i \otimes d\bar{z}^j + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_k a'_{ijk}\bar{z}_k dz^i \otimes d\bar{z}^j + O(|z|^2).$$

Studiamo:

$$dw_j \otimes d\bar{w}_j = (dz_j + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ijk} z_k dz_i) \otimes (d\bar{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} a'_{jik} \bar{z}_k d\bar{z}_i).$$

Questa espressione è uguale a meno di termini $O(|z|^2)$ a:

$$dz^j \otimes d\bar{z}^j + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ijk} z_k dz_i \otimes d\bar{z}^j + \sum_{i,k=1}^{n} a'_{jik} \bar{z}_k dz^j \otimes d\bar{z}_i.$$

Quindi, sommando su j otteniamo che:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} dw^j \otimes d\bar{w}^j + O(|w|^2).$$

(3) implica (4): Sia ∇ la connessione di Chern di $(T^{1,0}M, g_{\mathbb{C}})$. La connessione indotta da ∇ su TM è compatibile con la metrica. Esistono coordinate olomorfe in un intorno di p tali che $dh_{ij}(0) = 0$. Sappiamo che la matrice di connessione della connessione di Chern in 0 è determinata dalla metrica:

$$\theta(x) = \bar{H}(x)^{-1} \partial(H)(x).$$

Ma $dh_{ij} = 0$ se e solo se $\partial h_{ij} = 0$ e $\bar{\partial} h_{ij} = 0$. Quindi $\theta(0) = 0$. Dunque la connessione indotta su TM_J attraverso l'isomorfismo canonico ha tutti i simboli di Christoffel nulli in 0:

$$\Gamma^k_{ij}(x) = 0.$$

In particolare il suo tensore di torsione $T_D(p) = 0$. Visto che in ogni punto p possiamo trovare un sistema di coordinate olomorfe per cui la matrice di connessione è 0, $T_D(p) = 0$ per ogni p e la connessione indotta è simmetrica e compatibile con la metrica e dunque è la connessione di Levi-Civita. (4) implica (1): La connessione di Chern è $\mathbb{C}$-lineare. Quindi:

$$i\nabla(X) = \nabla(i \cdot X)$$

Attraverso l'isomorfismo canonico ∇ viene mandata sulla connessione di Levi-Civita. Poichè

$$\Xi(i \cdot X) = J(\Xi(X))$$

la $\mathbb{C}$-linearità di ∇ si traduce nel fatto che $D \cdot J = J \cdot D$. □

Presentiamo ora l'esempio fondamentale di metrica Kähleriana. Mostreremo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà di Kähler mostrando che ammette una metrica di Kähler chiamata metrica di Fubini-Study. Indicheremo con $(z_0 : \ldots : z_n)$ le coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n$. Sia quindi U_i la copertura aperta standard di $\mathbb{P}^n$, cioè $U_i = \{(z_0 : \ldots : z_n) | z_i \neq 0\}$. Siano

$$\phi_i : U_i \simeq \mathbb{C}^n,$$

$$(z_0 : \ldots : z_n) \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{\hat{z}_i}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}).$$

Definiamo

$$\omega_i := \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left(\sum_{l=0}^{n} |\frac{z_l}{z_i}|^2 \right) \in \mathcal{A}^{1,1}(U_i),$$

che in coordinate corrisponde a:

$$\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 + 1 \right).$$

Siano U_i ed U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Mostriamo ora che $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$.

$$\log \left(\sum_{l=0}^{n} |\frac{z_l}{z_i}|^2 \right) = \log \left(|\frac{z_j}{z_i}|^2 \sum_{l=0}^{n} |\frac{z_l}{z_j}|^2 \right) = \log \left(|\frac{z_j}{z_i}|^2 \right) + \log \left(\sum_{l=0}^{n} |\frac{z_l}{z_j}|^2 \right).$$

Quindi basta mostrare che

$$\log \left(|\frac{z_j}{z_i}|^2 \right) = 0$$

su $U_i \cap U_j$. Visto che $\frac{z_j}{z_i}$ è la j-esima funzione coordinata questo segue da:

$$\partial\bar{\partial} \log(|z|^2) = \partial \left(\frac{1}{z\bar{z}} \bar{\partial}(z\bar{z}) \right) = \partial \left(\frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \right) = 0.$$

Quindi possiamo incollare le ω_i ad una forma $\omega_{FS} \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathbb{P}^n)$. Poichè $\overline{\partial\bar{\partial}} = \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$ otteniamo che $\omega_i = \bar{\omega}_i$. Questo implica anche che ω_{FS} è chiusa. Studiamo ω_i in coordinate:

$$\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 + 1 \right) = \frac{\sum dw_i \wedge d\bar{w}_i}{1 + \sum |w_i|^2} - \frac{(\sum \bar{w}_i dw_i) \wedge (\sum w_i d\bar{w}_i)}{(1 + \sum |w_i|^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \sum |w_i|^2)^2} \sum h_{ij} dw_i \wedge d\bar{w}_j.$$

Con $h_ij = (1 + \sum |w_i|^2)\delta_{ij} - \bar{w}_i w_j$. Sia u in $\mathbb{C}^n$, per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, indicando con (,) il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$:

$$u^t(h_{ij})\bar{u} = (u, u) + (w, w)(u, u) - u^t\bar{w}w^t\bar{u} =$$

$$= (u, u) + (w, w)(u, u) - (u, w)(w, u) =$$
$$= (u, u) + (w, w)(u, u) - \overline{(w, u)}(w, u) =$$
$$= (u, u) + (w, w)(u, u) - |(w, u)|^2 > 0.$$

Quindi h_{ij} è definita positiva. Quindi ω_{FS} è la forma di Kähler associata ad una metrica.

Poichè se g è una metrica di Kähler su una varietà complessa M la sua restrizione ad ogni sottovarietà complessa di M è ancora una metrica di Kähler abbiamo che tutte le sottovarietà del proiettivo sono Kähler.

4.2 Teoria di Hodge sulle varietà Kähleriane

Uno dei motivi per cui le varietà di Kähler sono importanti è che su di esse la teoria di Hodge assume una forma particolarmente interessante. Nel seguito indicheremo con n la dimensione complessa di M.

Lemma 4.2.1. *Sia (M, g) varietà complessa e sia $(U; z_1, \ldots, z_n)$ un intorno coordinato di p. Al solito $z_i = x_i + iy_i$. Allora per ogni $m \leq n$:*

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m (dz^1 \wedge d\bar{z}^1) \wedge \ldots \wedge (dz^m \wedge d\bar{z}^m) = (dx^1 \wedge dy^1) \wedge \ldots \wedge (dx^m \wedge dy^m).$$

Infatti sappiamo che $dz^i = dx^i + idy^i$ e $d\bar{z}^i = dx^i - idy^i$. Quindi

$$\left(\frac{i}{2}\right)(dz^i \wedge d\bar{z}^i) = \left(\frac{i}{2}\right)((dx^i + idy^i) \wedge (dx^i - idy^i)) =$$

$$\left(\frac{i}{2}\right)(-2idx^i \wedge dy^i) = dx^i \wedge dy^i.$$

Definizione 4.2.2. *Se dx^i, dy^i sono una base ortonormale di $(T_xM)^*$, per $m = n$ questo definisce una forma volume orientata positivamente per l'orientazione naturale di T_xM. Nel caso non siano una base ortonormale possiamo usare (**??**) e otteniamo che:*

$$vol = \left(\frac{i}{2}\right)^n \det(h_{ij})dz^1 \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^n.$$

Sia (M,g) una varietà dotata di una struttura quasi complessa (e quindi orientata). Sia $g_{\mathbb{C}}$ l'estensione hermitiana su $T_{\mathbb{C}}M$ della metrica. Come nel caso reale usando la metrica g e l'orientazione introduciamo l'operatore:

$$* : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{2n-k}$$

L'operatore $*$ associato a (TM, g, vol) può essere esteso in modo $\mathbb{C}$-lineare ai fibrati complessificati e con abuso di notazione verrà ancora indicato con $*$:

$$* : \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^{2n-k}_{\mathbb{C}}$$

$$\beta \wedge *\bar{\alpha} = g_{\mathbb{C}}(\beta, \alpha) vol,$$

per ogni $\beta \in \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}$.

Siano γ_1 e γ_2 una (p_1, q_1)-forma ed una (p_2, q_2)-forma, con $p_1+p_2+q_1+q_2 = 2n$. Allora se $(p_1 + p_2, q_1 + q_2) \neq (n, n)$:

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 = 0.$$

Sia α una (p, q) forma, $p + q = k$. Allora $*\alpha$ è una $2n - k$ forma. Inotre per ogni k-forma β:

$$\beta \wedge *\bar{\alpha} = g_{\mathbb{C}}(\beta, \alpha) \cdot vol.$$

$$*\alpha = \sum_{p+q=2n-k} \eta_{p,q}.$$

Poichè la decomposizione (p, q) è una decomposizione ortogonale rispetto a $g_{\mathbb{C}}$ otteniamo quindi che l'operatore $*$ complessificato mappa $\mathcal{A}^{p,q}$ su $A^{n-q,n-p}$.

Definizione 4.2.3. *Definiamo l'operatore d^* come l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di d^*. Poichè M ha dimensione pari allora*

$$d^* := - * \circ d \circ *$$

Definiamo gli operatori $\partial^*, \bar{\partial}^*$ come:

$$\bar{\partial}^* = - * \circ \partial \circ * \qquad \partial^* = - * \circ \bar{\partial} \circ *.$$

Lemma 4.2.4. *Sia (M,g) varietà complessa hermitiana. Allora $d^* = \partial^* + \bar{\partial}^*$ e $\partial^{*2} = \bar{\partial}^{*2} = 0$.*

Definiamo ora i laplaciani associati.

Definizione 4.2.5. *Sia (M,g) varietà complessa hermitiana. Definiamo $\Delta = dd^* + d^*d$, $\Delta_{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial$, $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$.*

Definizione 4.2.6. *Diciamo che una forma α è armonica (rispettivamente ∂-armonica,$\bar{\partial}$-armonica) se $\Delta(\alpha) = 0$, (rispettivamente $\Delta_\partial(\alpha) = 0$, $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0$).*

Definizione 4.2.7. *Indichiamo con $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ (rispettivamente $\mathcal{H}^{p,q}_{\partial}(M)$,$\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$) lo spazio delle (p,q) forme armoniche (rispettivamente ∂-armoniche,$\bar{\partial}$-armoniche) su M.*

La coniugazione complessa mette in relazione le forme ∂-armoniche e $\bar{\partial}$-armoniche:

$$\overline{\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}} \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{\partial}.$$

Vogliamo scrivere esplicitamente la formula per l'operatore $\bar{\partial}^*$ sulle $(0,1)$ forme. Sia $(U, z_1, \ldots, z_n)$ una carta coordinata. Sappiamo che

$$vol = \left(\frac{i}{2}\right)^n \det(h_{ij}) dz^1 \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^n.$$

Alleggeriamo un po' la notazione usando:

$$\gamma = \det h_{ij} \qquad dv = \left(\frac{i}{2}\right)^n dz^1 \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^n.$$

Utilizzeremo anche la convenzione di somma di Einstein. Sia $\alpha = \alpha_i d\bar{z}^i$ la rappresentazione locale di α, $\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Sappiamo che $\forall \phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$(\bar{\partial}\phi, \alpha)_{\mathcal{L}^2} = (\phi, \bar{\partial}^*\alpha)_{\mathcal{L}^2}.$$

Ovvero:

$$\int_M < \bar{\partial}\phi, \alpha > vol = \int_M \phi \overline{\bar{\partial}^*\alpha} vol.$$

In coordinate:

$$\bar{\partial}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}^i.$$

Quindi

$$< \bar{\partial}\phi, \alpha >= \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_i} \overline{\alpha_j} < d\bar{z}^i, d\bar{z}^j >=$$

$$= 2 \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_i} \overline{\alpha_j} h^{ji},$$

poiché $< d\bar{z}^i, d\bar{z}^j >= 2h^{ji}$. Sia $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(U)$. Allora:

$$(\bar{\partial}\phi, \alpha)_{\mathcal{L}^2} = \int_M < \bar{\partial}\phi, \alpha > vol = \int_U < \bar{\partial}\phi, \alpha > vol =$$

$$2\int_U \frac{\partial\phi}{\partial\bar z_i} h^{ji}\overline{\alpha_j}\gamma dv =$$

integrando per parti e poichè $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$

$$= -2\int_U \phi\frac{\partial}{\partial\bar z_i}(h^{ji}\overline{\alpha_j}\gamma)dv = -2\int_M \phi\frac{\partial}{\partial\bar z_i}(h^{ji}\overline{\alpha_j}\gamma)dv. \tag{4.1}$$

Ma:

$$\frac{\partial}{\partial\bar z_i}(h^{ji}\overline{\alpha_j}\gamma) =$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z_i}(h^{ji})\overline{\alpha_j}\gamma + g^{ij}\frac{\partial\overline{\alpha_j}}{\partial\bar z_i}\gamma + \overline{\alpha_j}h^{ji}\frac{\partial\gamma}{\partial\bar z_i}. \tag{4.2}$$

Usando (**??**)

$$\frac{\partial}{\partial\bar z_i}h^{ji} = -h^{jk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}h^{li},$$

invece:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\bar z_i} = \frac{\partial\det(h_{ij})}{\partial\bar z_i}.$$

Usando(**??**)

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\bar z_i} = \gamma h^{lk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z^i}.$$

Quindi (**??**) diventa:

$$\gamma\big(-h^{jk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}h^{li}\overline{\alpha_k} + h^{ji}\frac{\partial\overline{\alpha_j}}{\partial\bar z_i} + h^{ji}h^{lk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}\overline{\alpha_j}\big). \tag{4.3}$$

Studiamo:

$$-h^{jk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}h^{li} + h^{ji}h^{lk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}.$$

Poichè gli indici i e k sono muti possiamo scambiarli nella prima espressione:

$$-h^{ji}\frac{\partial h_{il}}{\partial\bar z_k}h^{lk} + h^{ji}h^{lk}\frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i} =$$

$$h^{ji}h^{lk}\Big(-\frac{\partial h_{il}}{\partial\bar z_k} + \frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}\Big).$$

Per la condizione di Kähler:

$$\frac{\partial h_{il}}{\partial\bar z_k} = \frac{\partial h_{kl}}{\partial\bar z_i}.$$

Otteniamo quindi:

$$\bar\partial^*\alpha = -h^{ij}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\bar z_i}.$$

Definizione 4.2.8. *Definiamo l'operatore L:*

$$L : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+2}$$

$$\alpha \mapsto \omega \wedge \alpha.$$

Definiamo Λ*:*

$$\Lambda : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k-2}$$

come il suo aggiunto formale rispetto alla metrica indotta da $g_{\mathbb{C}}$*.* L *e* Λ *sono detti operatori di Lefschetz.*

Ricordiamo senza dimostrare il seguente teorema noto come scomposizione di Lefschetz sulle forme.

Teorema 4.2.9. *Sia* (M, g) *una varietà hermitiana. Allora esiste una somma diretta di fibrati vettoriali:*

$$\bigwedge{}^k M = \bigoplus_{i \geq 0} L^i(P^{k-2i}M).$$

Dove $P^s M := Ker(\Lambda : \bigwedge{}^s M \to \bigwedge{}^{s-2} M)$*. Questa decomposizione è compatibile con la decomposizione in bigrado, poichè* L, Λ *sono reali.*

Lemma 4.2.10. *Le due affermazioni seguenti sono vere:*

1. $[d, L] = 0,$
2. *per* $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$
$$L^{n-k+1}(\alpha) = 0.$$

Dimostrazione. 1.

$$[d, L]\alpha = d(L(\alpha)) - L(d(\alpha)) = d(\omega \wedge \alpha) - \omega \wedge d\alpha = d\omega \wedge \alpha = 0$$

2.

$$L^{n-k+1}(\alpha) \in \mathcal{A}^{2n+2}(M) = 0.$$

□

Lemma 4.2.11.

$$\Lambda = *^{-1} \circ L \circ *.$$

Dimostrazione. Indichiamo con $<,>$ il prodotto scalare $g_{\mathbb{C}}(p)$. Poichè $\bar{\omega} = \omega$.

$$< \beta, \Lambda\alpha > \cdot vol =< L\beta, \alpha > \cdot vol =$$

$$= L\beta \wedge *\bar{\alpha} = \omega \wedge \beta \wedge *\bar{\alpha} =$$

$$= \beta \wedge (\omega \wedge *\bar{\alpha}) =< \beta, *^{-1} L(*\alpha) > \cdot vol.$$

□

Definizione 4.2.12. *Sia* $\mathbf{I}$ *l'operatore che agisce su* $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ *come moltiplicazione per* i^{p-q}*, cioè:*

$$\mathbf{I} = \sum_{p,q} i^{p-q}\Pi^{p,q},$$

ove $\Pi^{p,q}$ *è la proiezione da* $\mathcal{A}^k$ *sulle* (p,q) *forme (con* $p+q=k$*). Definiamo:*

$$d^c := \mathbf{I}^{-1} \circ d \circ \mathbf{I} \qquad d^{c*} := - * \circ d^c \circ *.$$

Lemma 4.2.13. *Siano* $\mathbf{I}$ *e* d^c *gli operatori appena definiti. Sia* $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ *siano* $X_i, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q$ *sezioni di* $T_{\mathbb{C}}M$ *allora:*

$$\mathbf{I}(\alpha)(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q) = \alpha(J(X_1), \dots, J(X_p), J(Y_1), \dots, J(Y_q)).$$

Inoltre

$$d^c = -i(\partial - \bar{\partial}).$$

Dimostrazione. Per la decomposizione in bigrado basta dimostrarlo per una forma di bigrado puro (p,q). Sia $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$. Per la definizione di forme di tipo $(1,0)$ e $(0,1)$

$$\alpha(J(X_1), \dots, J(X_p), J(Y_1), \dots, J(Y_q)) = i^p \cdot (-i^q)\alpha(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q) =$$

$$i^{p-q}\alpha(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q).$$

Sempre per la decomposizione bigrado possiamo provare la seconda affermazione per una forma di tipo puro (p,q). Sia $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$. Allora:

$$\begin{aligned} d^c(\alpha) = \mathbf{I}^{-1}(d(\mathbf{I}(\alpha))) = \\ = \mathbf{I}^{-1}(i^{p-q} \cdot (\partial + \bar{\partial})(\alpha)) = \\ = i^{p-q}(\mathbf{I}^{-1}\partial\alpha + \mathbf{I}^{-1}\bar{\partial}\alpha) = \\ = i^{q-p-1} \cdot i^{p-q}\partial(\alpha) + i^{q+1-p} \cdot i^{p-q}\bar{\partial}(\alpha) = \\ = -i(\partial - \bar{\partial})(\alpha). \end{aligned}$$

□

Enunciamo le seguenti proprietà degli operatori di Lefschetz senza dimostrarle.

Proposizione 4.2.14.

$$[\mathbf{I}, L] = 0$$

$$[L, \Lambda] = \sum_{k=0}^{2n} (k-n) \cdot \Pi^k \qquad n = dim_{\mathbb{C}} M,$$

$$[L^j, \Lambda](\alpha) = j(k-n+j-1)L^{j-1}(\alpha)$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$,

$$*L^j\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} \cdot L^{n-k-j}\mathbf{I}(\alpha)$$

per ogni α *in* P^kM.

Teorema (Identità di Kähler) 4.2.15. *Su ogni varietà Kähleriana:*

$$[\Lambda, d] = -d^{c*} \qquad [\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^* \qquad [\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*.$$

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando la prima identità.

Usando la decomposizione di Lefschetz è sufficiente dimostrare l'uguaglianza per forme del tipo

$$L^j(\alpha)$$

con α in $P^k(M)$. $d\alpha$ appartiene a $\mathcal{A}^{k+1}(M)$ e può essere scritto secondo la decomposizione di Lefschetz come:

$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1 + L^2\alpha_2 + \dots$$

con $\alpha_j \in P^{k+1-2j}(M)$. Poichè $[L, d] = 0$ e $L^{n-k+1}\alpha = 0$,

$$0 = L^{n-k+1}\alpha_0 + L^{n-k+2}\alpha_1 + L^{n-k+3}\alpha_2 + \dots.$$

Dal fatto che la decomposizione di Lefschetz è una decomposizione in somma diretta, segue che $L^{n-k+j+1}\alpha_j = 0$ per $j = 0, 1, \dots.$ Ma L^l è iniettivo su $\mathcal{A}^i(M)$ se $l \leq n-i$. Quindi poichè ciascuno degli $\alpha_j \in \mathcal{A}^{k+1-2j}(M)$, troviamo che $\alpha_j = 0$ per $j \geq 2$. Quindi:

$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1,$$

con $\Lambda\alpha_0 = \Lambda\alpha_1 = 0$. Poiché d ed L^j commutano

$$\Lambda dL^j\alpha = \Lambda L^j d\alpha = \Lambda L^j(\alpha_0 + L\alpha_1) =$$

$$= \Lambda L^j\alpha_0 + \Lambda L^{j+1}\alpha_1.$$

Poichè le due forme sono primitive $L^j\Lambda\alpha_0 = L^{j+1}\Lambda\alpha_1 = 0$. Dunque

$$\Lambda dL^j\alpha = \Lambda L^j\alpha_0 + \Lambda L^{j+1}\alpha_1 = [\Lambda, L^j]\alpha_0 + [\Lambda, L^{j+1}]\alpha_1 =$$

$$-j(k+1-n+j-1)L^{j-1}\alpha_0 - (j+1)(k-1-n+j)L^j\alpha_1$$

dove usiamo la Proposizione **??**. D'altro canto poichè anche α è primitiva,

$$d\Lambda L^j\alpha = d[\Lambda, L^j](\alpha) = -j(k-n+j-1)L^{j-1}d\alpha =$$

$$-j(k-n+j-1)(L^{j-1}\alpha_0 + L^j\alpha_1).$$

Quindi:

$$[\Lambda, d](L^j\alpha) = -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1.$$

Peraltro, sempre per la Proposizione **??**

$$-d^{c*}L^j\alpha = *\mathbf{I}^{-1}d\mathbf{I} * L^j\alpha =$$

$$= *\mathbf{I}^{-1}d\mathbf{I}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{j!}{(n-k-j)!}L^{n-k-j}\mathbf{I}(\alpha)\right)$$

Sia α una (p,q)-forma. Poichè la parità di $p-q$ è la stessa di $p+q$:

$$\mathbf{I}^2(\alpha) = i^{2(p-q)}\alpha = (-1)^{p+q}\alpha = (-1)^k\alpha.$$

Sfruttando la relazione appena trovata e il fatto che $\mathbf{I}$ commuta con L e con $*$ le sue potenze otteniamo

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k}\frac{j!}{(n-k-j)!}(\mathbf{I}^{-1}(*dL^{n-k-j}\alpha) =$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k}\frac{j!}{(n-k-j)!}(\mathbf{I}^{-1}(*L^{n-k-j}d\alpha) =$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k}\frac{j!}{(n-k-j)!}(\mathbf{I}^{-1}(*L^{n-k-j}\alpha_0 + *L^{n-k-j+1}\alpha_1)).$$

Usando nuovamente l'ultima uguaglianza della Proposizione **??** otteniamo finalmente

$$\begin{aligned}-d^{c*}L^j\alpha &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k+\frac{(k+1)(k+2)}{2}}j \cdot (L^{j-1}\alpha_0) + \\ &+ (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k+\frac{k(k-1)}{2}}(n-k-j+1)\cdot(L^j\alpha_1) = \\ &= -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1.\end{aligned}$$

Ciò dimostra la prima uguaglianza. Le altre due seguono scomponendo in bigrado. Infatti

$$-i*(\partial - \bar{\partial})* = -d^{c*} = [\Lambda, d] = [\Lambda, \partial] + [\Lambda, \bar{\partial}].$$

Consideriamo l'azione di questi operatori sulle forme pure di tipo (p, q). $\bar{\partial}^*$ e $[\Lambda, \partial]$ mappano $\mathcal{A}^{p,q}$ sulle $(p, q-1)$-forme, mentre ∂^* e $[\Lambda, \bar{\partial}]$ mappano $\mathcal{A}^{p,q}$ sulle $(p-1, q)$ forme. Seguono immediatamente le due ultime uguaglianze della tesi. $\square$

Corollario 4.2.16.

$$\Delta = 2\Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_{\partial}.$$

Dimostrazione. Prima di tutto proviamo che $\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0$ Per il teorema precedente

$$i(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) =$$
$$= \partial[\Lambda, \partial] + [\Lambda, \partial]\partial =$$
$$= \partial\Lambda\partial - \partial\Lambda\partial = 0.$$

Analogamente $\bar{\partial}\partial^* + \partial^*\bar{\partial} = 0$. Dunque per l'espressione di Δ otteniamo:

$$\Delta = (\partial + \bar{\partial})(\partial^* + \bar{\partial}^*) + (\partial^* + \bar{\partial}^*)(\partial + \bar{\partial}) =$$

$$= \partial\partial^* + \bar{\partial}\partial^* + \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \partial^*\partial + \partial^*\bar{\partial} + \bar{\partial}^*\partial + \bar{\partial}^*\bar{\partial} =$$
$$= \Delta_{\partial} + \Delta_{\bar{\partial}} + \bar{\partial}\partial^* + \partial\bar{\partial}^* + \partial^*\bar{\partial} + \bar{\partial}^*\partial.$$

Per le due identità dimostrate sopra abbiamo quindi:

$$\Delta = \Delta_{\bar{\partial}} + \Delta_{\partial}.$$

Ma

$$\Delta_{\partial} = \partial^*\partial + \partial\partial^* =$$
$$i[\Lambda, \bar{\partial}]\partial + i\partial[\Lambda, \bar{\partial}] =$$
$$i(\Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial + \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda).$$

Poichè $\bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$ otteniamo:

$$i(\Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial + \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda) =$$

$$i(-\Lambda\partial\bar{\partial} + \partial\Lambda\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial\Lambda - \bar{\partial}\Lambda\partial =$$
$$i(-[\Lambda, \partial]\bar{\partial} - \bar{\partial}[\Lambda, \partial] =$$
$$-i[\Lambda, \partial]\bar{\partial} + \bar{\partial}(-i[\Lambda, \partial]) =$$
$$\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^* =$$
$$\Delta_{\bar{\partial}}.$$

E questo prova la tesi. $\square$

Come nel caso dell'operatore di de Rham d, anche per l'operatore $\bar{\partial}$ vale una decomposizione di Hodge sulle forme.

Decomposizione di Hodge 4.2.17. *Sia (M, g) una varietà hermitiana compatta. Allora esiste una decomposizione ortogonale rispetto a $(,)^2_{\mathcal{L}}$:*

$$\mathcal{A}^{p,q}(M) = \bar{\partial}\mathcal{A}^{p,q-1}(M) \oplus \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) \oplus \bar{\partial}^*\mathcal{A}^{p,q+1}(M).$$

Pertanto

$$H^{p,q}(M) \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(M).$$

Nel caso Kähleriano questo risultato si combina con la teoria di Hodge Riemanniana per dare il seguente risultato fondamentale.

Teorema di Hodge 4.2.18. *Se M è una varietà complessa compatta che ammette almeno una metrica Kähleriana, allora*

$$H_k(M, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

e

$$\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M).$$

Dimostrazione. Sia g una metrica Kähleriana su M. Dalla teoria di Hodge Riemanniana sappiamo che

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^k(M, g).$$

Poiché la metrica g è Kähleriana, $\Delta = 2\Delta_{\bar{\partial}}$, dunque Δ rispetta la scomposizione in bigrado. Pertanto il nucleo di Δ si spezza nelle componenti $\mathcal{H}^k \cap \mathcal{A}^{p,q} = \mathcal{H}^{p,q}$. Dunque

$$H^k(M, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

La seconda affermazione segue dal fatto che il coniugio è un isomorfismo antilineare $\mathcal{H}^{p,q} \to \mathcal{H}^{q,p}$. $\square$

$\partial\bar{\partial}$-Lemma 4.2.19. *Sia M varietà di Kähler compatta e sia ϕ una forma d-chiusa di tipo (p, q) le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *α è d-esatta, cioè esiste una $p + q - 1$-forma β tale che $d\beta = \alpha$,*

2. *α è ∂-esatta, cioè esiste una $(p - 1, q)$-forma β tale che $\partial\beta = \alpha$,*

3. *α è $\bar{\partial}$-esatta, cioè esiste una $(p, q - 1)$-forma β tale che $\bar{\partial}\beta = \alpha$,*

4. α è $\partial\bar{\partial}$-esatta, cioè esiste una $(p-1, q-1)$-forma β tale che $\partial\bar{\partial}\beta = \alpha$,

Dimostrazione. Poichè M è Kähler non dobbiamo specificare rispetto a che operatore una forma è armonica. Aggiungiamo perciò una quinta condizione equivalente: la forma α è ortogonale a $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ per una metrica di Kähler arbitraria g. Per la decomposizione di Hodge questa nuova condizione è implicata da ciascuna delle altre quattro. Inoltre se α è $\partial\bar{\partial}$-esatta esiste un $\beta \in \mathcal{A}^{p-1,q-1}$ tale che $\partial\bar{\partial}\beta = \alpha$. Poichè $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ allora:

- $\alpha = \partial(\bar{\partial}\beta)$ quindi α è ∂ esatta.
- $\alpha = -\bar{\partial}(\partial\beta)$ quindi α è $\bar{\partial}$ esatta
- $\alpha = \frac{1}{2}(\partial + \bar{\partial})(\bar{\partial}\beta - \partial\beta)$ quindi α è d-esatta.

Quindi la quarta condizione implica le prime tre. Proviamo che la quinta implica la quarta. Se α è d chiusa (e quindi ∂ chiusa) ed ortogonale a $\mathcal{H}^{p,q}$ per la decomposizione di Hodge rispetto all'operatore ∂ abbiamo che α è ∂-esatta. Sia γ tale che $\alpha = \partial\gamma$. Applichiamo la decomposizione di Hodge relativa all'operatore $\bar{\partial}$ a γ. Quindi

$$\gamma = \bar{\partial}\beta + \bar{\partial}^*\eta + \xi$$

dove ξ è armonica. Quindi:

$$\alpha = \partial\bar{\partial}\beta + \partial\bar{\partial}^*\eta.$$

Ma $\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0$ e $\bar{\partial}\alpha = 0$. Quindi $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\eta = 0$ Poichè $(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\eta, \partial\eta) = ||\bar{\partial}^*\partial\eta||^2 = 0$ allora $\partial\bar{\partial}^*\eta = -\bar{\partial}^*\partial\eta = 0$. Quindi $\alpha = \partial\bar{\partial}\beta$. □

Corollario 4.2.20. *Se M una varietà Kähleriana compatta, l'isomorfismo*

$$H_k(M, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$$

non dipende dalla metrica di Kähler scelta.

Dimostrazione. Siano g e g' due metriche di Kähler su M. Sia $a \in H^{p,q}(M)$, e siano α ed α' i rappresentanti armonici in $\mathcal{H}^{p,q}(M.G)$ e $\mathcal{H}^{p,q}(M, g')$ rispettivamente. Pertanto $\alpha' = \alpha + \bar{\partial}\gamma$ per qualche $\gamma \in \mathcal{A}^{p,q-1}$. Inoltre α e α' sono d-chiuse, dunque $\bar{\partial}\gamma$ è una forma di tipo (p, q) d-chiusa e $\bar{\partial}$-esatta. Per il $\partial\bar{\partial}$-lemma essa è anche d-esatta, ossia $[\alpha] = [\alpha']$ in $H^k(M)$. □

4.3 Il tensore di Ricci di una varietà Kähleriana

Sia (M,g) una varietà complessa kähleriana. Sia D la connessione di Levi-Civita associata alla metrica g. In questa sezione indicheremo con ∇ la complessificazione della connessione di Levi-Civita.

Lemma 4.3.1. *Sia (M,g) una varietà Kähleriana, g una metrica Kähleriana. Sia Z una sezione di $T^{1,0}M$ ed Y una sezione di TM. Allora $\nabla_Y X$ è una sezione di $T^{1,0}M$.*

Dimostrazione. Poichè Z appartiene a $T^{1,0}M$ esiste un X sezione di TM tale che

$$Z = X - iJ(X).$$

Allora si ha:

$$\nabla_Y Z = \nabla_Y(X - iJ(X)) = D_Y(X) - iD(J(X)).$$

Su una varietà Kähleriana D commuta con la struttura complessa J. Quindi:

$$D_Y(X) - iD(J(X)) = D_Y(X) - iJ(D_Y(X)).$$

Che è una sezione di $T^{1,0}M$. □

Definizione 4.3.2. *Definiamo la forma di Ricci di ω come:*

$$Ric(\omega)(X,Y) = r(J(X),Y).$$

Teorema 4.3.3. *Le proprietà della forma di Ricci $Ric(\omega)$ sono le seguenti:*

1. *$Ric(\omega)$ è una 2-forma,*
2. *$Ric(\omega)$ è chiusa,*
3. *$[Ric(\omega)] = 2\pi c_1(M)$.*

Dimostrazione. Sia D la connessione di Levi-Civita associata alla metrica Riemanniana g. Siano $z_1,\dots,z_n$ coordinate olomorfe in un aperto U di M. Complessifichiamo la connessione, siano Z,W sezioni di $T_{\mathbb{C}}M$. Indichiamo la parte reale e la parte immaginaria di Z e W con Z_1,Z_2 W_1,W_2 rispettivamente.

$$\overline{\nabla_Z W} = \overline{\nabla_{Z_1+iZ_2}(W_1+iW_2)} =$$
$$= \overline{\nabla_{Z_1}(W_1+iW_2) + \nabla_{iZ_2}(W_1+iW_2)} =$$

$$= \overline{\nabla_{Z_1}W_1 + \nabla_{Z_1}iW_2 + \nabla_{iZ_2}W_1 + i\nabla_{iZ_2}W_2} =$$
$$= \overline{D_{Z_1}W_1 + iD_{Z_1}W_2 + iD_{Z_2}W_1 - 1D_{Z_2}W_2} =$$
$$= D_{Z_1}W_1 - iD_{Z_1}W_2 - iD_{Z_2}W_1 - D_{Z_2}W_2 =$$
$$= \nabla_{Z_1}(W_1 - iW_2) - i \cdot \nabla_{Z_2}(W_1 - iW_2) =$$
$$= \nabla_{Z_1 - iZ_2}(W_1 - iW_2) = \nabla_{\bar{Z}}\bar{W}.$$

I simboli di Christoffel rispetto alla base $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z_n}}\}$ sono definiti dalla formula:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial z_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k} + \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{k}}}.$$

Studiamo:

$$\overline{\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial z_j}} = \overline{\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial z_k} + \Gamma_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{k}}}} =$$
$$= \overline{\Gamma_{ij}^k} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{k}}} + \overline{\Gamma_{ij}^{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Ma questo per quanto abbiamo appena provato è uguale a:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_{\bar{i}}}} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{j}}} = \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^k \frac{\partial}{\partial z_k} + \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z_{\bar{k}}}.$$

Quindi:

$$\overline{\Gamma_{ij}^k} = \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} \qquad \overline{\Gamma_{ij}^{\bar{k}}} = \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^k.$$

In più il fatto che ∇ manda sezioni di $T^{1,0}M$ in sezioni di $T^{1,0}M$ implica che:

$$\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = \Gamma_{i\bar{j}}^k = \Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = \Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^k = 0.$$

Così che solo Γ_{ij}^k e $\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \overline{\Gamma_{ij}^k}$ sopravvivono. Dal fatto che ω è chiusa e dalla formula che definisce i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita:

$$\Gamma_{ij}^m g_{m\bar{k}} = \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z_i}.$$

Calcoliamo il tensore di curvatura di g:

$$R(\frac{\partial}{\partial z_A}, \frac{\partial}{\partial z_B})\frac{\partial}{\partial z_k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_A}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_B}} \frac{\partial}{\partial z_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_B}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_A}} \frac{\partial}{\partial z_k} =$$
$$\left(\frac{\partial \Gamma_{Bk}^s}{\partial z_A} - \frac{\partial \Gamma_{Ak}^s}{\partial z_B} + \Gamma_{At}^s \Gamma_{Bk}^t - \Gamma_{Bt}^s \Gamma_{Ak}^t \right) \frac{\partial}{\partial z_s} \qquad A, B = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}.$$

Allora per $A = \bar{i}, B = \bar{j}$ otteniamo 0. Usando le coordinate normali in p si verifica che questo è lo stesso vale per $A = i, B = j$. Quindi sopravvivono solo le componenti di tipo $(1,1)$ del tensore curvatura:

$$R^l_{i\bar{j}k} = -\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial \bar{z}_{\bar{j}}}.$$

Usando la formula che esprime i simboli di Christoffel nel caso delle metriche Kähleriane:

$$\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial \bar{z}_j} = -g^{s\bar{m}} \frac{\partial g_{t\bar{m}}}{\partial \bar{z}^j} g^{t\bar{p}} \frac{\partial g_{k\bar{p}}}{\partial z^i} + g^{s\bar{p}} \frac{\partial^2 g_{k\bar{p}}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}.$$

Quindi

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g^{t\bar{p}} \frac{\partial g_{t\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j} \frac{\partial g_{k\bar{p}}}{\partial z^i} - \frac{\partial^2 g_{k\bar{l}}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}.$$

Calcoliamo ora $r(X,Y)$ per due campi vettoriali dello stesso tipo:

$$r(X,Y) = \sum_i R(e_i, X, Y, \bar{e}_i) + \sum_i R(\bar{e}_i, X, Y, e_i).$$

Ma tutti gli addendi sono 0 poichè e_i, X sono entrambi dello stesso tipo. E allo stesso modo (usando la simmetria) per gli altri fattori. Quindi $r(X,Y) = 0$ se i campi vettoriali sono dello stesso tipo. Calcoliamo quindi $r(X, \bar{Y})$ per X ed Y di tipo (1,0).

$$r_{i\bar{j}} = r(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}) = (R^k_{k\bar{j}i} + R^{\bar{k}}_{\bar{k}\bar{j}i}) = R^k_{k\bar{j}i} = R_{k\bar{j}i\bar{m}} g^{k\bar{m}} = R_{i\bar{m}k\bar{j}} g^{k\bar{m}}.$$

Usando l'identità di Bianchi:

$$R_{i\bar{m}k\bar{j}} + R_{\bar{m}ki\bar{j}} + R_{ki\bar{m}\bar{j}} = 0.$$

Ma l'ultimo termine è 0 per le osservazioni precedenti sul tipo. Quindi

$$R_{i\bar{m}k\bar{j}} = -R_{\bar{m}ki\bar{j}}.$$

E quindi:

$$r_{i\bar{j}} = R_{i\bar{j}k\bar{m}} g^{k\bar{m}} = R^k_{i\bar{j}k} = tr R_{i\bar{j}}|_{T^{1,0}M}.$$

In altre parole $r_{i\bar{j}}$ è la traccia di $R_{i\bar{j}}$ visto come operatore da $T^{1,0}M$ in sé. Quindi: $Ric(\omega) = iRic_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$. Dunque

$$Ric(\omega)(X,Y) = itr(R_{XY}).$$

E questo prova tutte e tre le affermazioni contenute nella tesi. $\square$

Inoltre, sfruttando le proprietà funtoriali delle classi di Chern possiamo ottenere un'espressione esplicita molto comoda per $Ric(\omega)$.

Teorema 4.3.4. *In coordinate olomorfe locali:*

$$Ric(\omega) = -i\partial\bar{\partial} log det(h_{i\bar{j}}).$$

Dimostrazione. Sia Θ la curvatura della connessione di Chern su $T^{1,0}M$. Calcoliamo la curvatura della connessione di Chern di $\bigwedge^n T^{1,0}M$. La metrica indotta su $\bigwedge^n T^{1,0}M$ è $\det h_{ij}$. Quindi la formula per la curvatura della connessione di Chern di $\bigwedge^n T^{1,0}M$ da:

$$\Theta' = \bar{\partial}(\det(h_{ij}))^{-1}\partial \det h_{ij}.$$

Possiamo riscrivere questa formula come:

$$\Theta' = \bar{\partial}\partial \log\det h_{ij} = -\partial\bar{\partial}\log\det h_{ij}.$$

Poichè $\Theta' = Tr(\Theta)$ e $Ric(\omega) = iTr\Theta$, otteniamo che:

$$Ric(\omega) = -i\partial\bar{\partial}\log\det h_{ij}.$$

□

4.4 Il teorema di annullamento di Kodaira

Il teorema di Kodaira collega la curvatura di una connessione su un fibrato olomorfo in rette all'annullamento di tutti i gruppi di coomologia superiore.

Definizione 4.4.1. *Sia M una varietà kähleriana. Diciamo che una classe di coomologia $a \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M,\mathbb{R})$ è positiva, e scriviamo $a > 0$, se esiste una forma di Kähler ω tale che $a = [\omega]$.*

Teorema di annullamento di Kodaira 4.4.2. *Sia M una varietà di Kähler compatta e sia L un fibrato in rette olomorfo su M. Se $c_1(L) > 0$, allora*

$$H^q(M, \Omega^p \otimes L) = 0$$

se $p + q > n$.

4.5 Il teorema di Calabi-Yau

Il seguente teorema è un risultato profondo e con conseguenze importanti nella teoria delle varietà Kähleriane. La dimostrazione si compone di due parti, una di carattere geometrico ed una legata alla teoria delle equazioni alle derivate parziali non-lineari. Presentiamo la parte geometrica.

Teorema di Calabi-Yau 4.5.1. *Sia M una varietà Kähleriana compatta. Data una forma η di tipo (1,1) che rappresenta $2\pi c_1(M)$, e data una forma di Kähler ω, esiste una forma di Kähler ω' tale che*

1. $[\omega'] = [\omega]$;
2. $Ric(\omega') = \eta$.

Dimostrazione. Per il $\partial\bar{\partial}$-lemma applicato alle $(1,1)$-forme sappiamo che

$$Ric(\omega) - \eta = i\partial\bar{\partial}\psi$$

dove ψ è una funzione scalare definita a meno di una costante additiva. Poiché $Ric(\omega)$ ed η sono forme reali, ψ può essere scelta reale. Aggiungendo a ψ una costante, possiamo supporre che

$$\int_M e^{\psi}\omega^n = \int_M \omega^n.$$

Sia ω' una seconda forma di Kähler su M, tale che $[\omega'] = [\omega]$. Sia F la funzione positiva su M definita dalla relazione

$$(\omega')^n = F\omega^n.$$

Calcoliamo $Ric(\omega')$ in termini di $Ric(\omega), \eta, \psi$ ed F:

$$\begin{aligned} Ric(\omega') &= -i\partial\bar{\partial}\log\det(h'_{ij}) = \\ &= -i\partial\bar{\partial}\log\frac{\det(h'_{ij})}{\det(h_{ij})} + Ric(\omega) = \\ &= -i\partial\bar{\partial}\log F + \eta + i\partial\bar{\partial}\psi. \end{aligned}$$

Dunque $Ric(\omega') = \eta$ se e solo se $i\partial\bar{\partial}(\log F - \psi) = 0$, cioè se e solo se $\log F - \psi$ è pluriarmonica e quindi costante. D'altronde se $\log F - \psi \equiv c$, con $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_M \omega^n = \int_M e^{\psi}\omega^n = e^{-c}\int_M F\omega^n = e^{-c}\int_M (\omega')^n = e^{-c}\int_M \omega^n.$$

Dunque $c = 0$. In conclusione, $Ric(\omega') = \eta$ se e solo se $F = e^{\psi}$ cioè se e solo se

$$(\omega') = e^{\psi}\omega^n.$$

Per risolvere questa equazione nella forma ω' applichiamo di nuovo il $\partial\bar{\partial}$-lemma: la forma ω', essendo coomologa a ω, si può cercare nella forma $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\phi$ con ϕ una funzione reale su M. Scritta in termini di ϕ l'equazione diventa:

$$\det\bigl(h_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z_i \partial z_{\bar{j}}}\bigr) = \det(h_{i\bar{j}})e^{\psi}.$$

Questa è una equazione di Monge-Ampère complessa. È una equazione ellittica completamente non lineare. L'esistenza di una soluzione è stata dimostrata da Yau. $\square$

Capitolo 5

Varietà di Fano

5.1 Definizione e proprietà

Definizione 5.1.1. *Una varietà di Fano è una varieta Kähleriana compatta tale che* $c_1(M) > 0$*.*

Teorema 5.1.2. *Se* M *è una varietà di Fano*

$$\chi(\mathcal{O}_M) = 1.$$

Dimostrazione. Sia $K_M = \bigwedge^n (T^{1,0})^* = (detT^{1,0})^* = \Omega^n_M$. Sappiamo che:

$$\mathcal{O}_M = detT^{1,0} \otimes \Omega^n$$

ossia $\det T^{1,0}M$ è l'inverso (cioè il duale) del fibrato canonico. Pertanto si chiama fibrato anticanonico ed è ovviamente olomorfo. Allora $H^p(M, \mathcal{O}_M) = H^p(M, detT^{1,0} \otimes K_M) = H^p(M, \Omega^n \otimes detT^{1,0})$. Per le proprietà funtoriali delle classi di Chern sappiamo che $c_1(detT^{1,0}) = c_1(T^{1,0})$ che è una classe positiva poiché M è di Fano. Possiamo perciò applicare il teorema di annullamento di Kodaira, con $L = detT^{1,0}$. Perciò $H^p(M, \mathcal{O}_M) = 0$ per $p > 0$. Inoltre essendo M compatta e connessa,

$$dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathcal{O}_M) = 1.$$

Da questo segue la tesi. □

Teorema 5.1.3. *Se* M *è una varietà di Fano anche i suoi rivestimenti olomorfi di grado finito lo sono.*

Dimostrazione. Sia $\pi : \tilde{M} \to M$ un rivestimento olomorfo finito di M. Poichè M è compatta ed il suo rivestimento è finito anche $\tilde{M}$ è compatta. Sia p un generico punto in M e sia U_p un aperto ammissibile di p per il rivestimento. Quindi $\pi^{-1}(U_p) = \bigsqcup U_\alpha$ dove gli U_α sono aperti disgiunti che vengono mappati diffeomorficamente su U_p da π. Sia $\tilde{g} := \pi^* g$. Allora $\pi|_{U_\alpha}$ è un diffeomorfismo isometrico per ogni α. Sia $\omega \in c_1(M)$ una forma di Kähler. $\pi^*\omega$ è reale. $\pi^*\omega$ è chiusa poichè $d\pi^*(\omega) = \pi^*(d\omega) = \pi^*(0)$. Poichè π è un diffeomorfismo isometrico $\pi^*\omega$ è definita positiva. Poichè π è olomorfa π^* mappa forme di bigrado $(1,1)$ in forme di bigrado $(1,1)$. Quindi $\pi^*\omega$ è una forma di Kähler. Per le proprietà funtoriali delle classi di Chern abbiamo che:

$$c_1(\tilde{M}) = \pi^*(c_1(M)) = \pi^*[\omega] = [\pi^*\omega].$$

Quindi $\tilde{M}$ è Fano. □

5.2 Il teorema di Kobayashi sulle varietà di Fano

Teorema 5.2.1. *Le varietà di Fano sono semplicemente connesse.*

Dimostrazione. Per il teorema di Yau (**??**) sappiamo che esiste una metrica di Kähler ω la cui forma di Ricci $Ric(\omega)$ è definita positiva. Per il Corollario **??** al Teorema di Bonnet-Myers sappiamo che $\pi_1(M)$ è finito. Sia k la sua cardinalità e sia $\tilde{M}$ il rivestimento universale di M. $\tilde{(M)}$ è un rivestimento finito. Per il teorema sopra, $\tilde{M}$ è Fano. Calcoliamo ora la caratteristica di Eulero-Poincaré del fascio strutturale per M e per il suo rivestimento $\tilde{M}$. Usando la formula di Riemann-Roch-Hirzebruch otteniamo:

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = \int_{\tilde{M}} ch(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) td(\tilde{M}) = \int_{\tilde{M}} td(\tilde{M}).$$

$$\chi(\mathcal{O}_M) = \int_M ch(\mathcal{O}_M) td(M) = \int_M td(M).$$

Poiché π è un diffeomorfismo locale $T\tilde{M} \simeq \pi^* TM$. Dunque per le proprietà funtoriali delle classi di Chern abbiamo che:

$$\int_{\tilde{M}} td(\tilde{M}) = \int_{\tilde{M}} \pi^* td(M) = k \cdot \int_M td(M),$$

dunque $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = k\chi(\mathcal{O}_M)$. Ma per il teorema (**??**) abbiamo che:

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{M}}) = 1 \qquad \chi(\mathcal{O}_M) = 1$$

Confrontando le due equazioni otteniamo che $k = 1$. □